

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία σελίδα 149
 A2. . Θεωρία σελίδα 148
 A3. Θεωρία σελίδα 150
 A4. Λ-Σ-Σ-Σ-Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω x τα αγόρια και y τα κορίτσια, τότε το $0,7 \cdot x$ από τα αγόρια επέλεξε μπάσκετ και το $0,3 \cdot x$ δεν επέλεξε μπάσκετ. Ακόμα το $0,6 \cdot y$ από τα κορίτσια δεν επέλεξε μπάσκετ και το $0,4 \cdot y$ επέλεξε μπάσκετ. Θεωρούμε A το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέγεται τυχαία να παίξει μπάσκετ, τότε

	Επιλογή Μπάσκετ	Μη επιλογή Μπάσκετ
Αγόρια	$0,7 \cdot x$	$0,3 \cdot x$
Κορίτσια	$0,4 \cdot y$	$0,6 \cdot y$

$$P(A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{0,7x + 0,4y}{x + y} = 0,5 \Leftrightarrow 0,7x + 0,4y = 0,5x + 0,5y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2x$$

B2. Θεωρούμε B το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέγεται τυχαία να είναι κορίτσι και να μην επέλεξε το μπάσκετ, τότε

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{0,6 \cdot y}{x + y} = \frac{0,6 \cdot 2x}{3x} = 0,4$$

B3. Έχουμε ότι $0,3x = 9 \Leftrightarrow x = 30$ και $y = 2x = 60$, επομένως οι μαθητές της Α΄ Λυκείου θα είναι $x + y = 90$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \text{ Έχουμε ότι } P(\omega_1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x \cdot (\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ακόμα } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x_0=3} f'(3) = \frac{1}{4} \text{ με } P(\omega_2) = f'(3) = \frac{1}{4}$$

Ακόμα έχουμε

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4P(\omega_4) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + 5P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_4) = \frac{1}{10} \text{ και } P(\omega_3) = \frac{2}{5}$$

$$\Gamma 2. \text{ Έχουμε ότι } P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20} \text{ και}$$

$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A - B = \{\omega_3\} \text{ και } P(A - B) = P(\omega_3) = \frac{2}{5}$$

$\Gamma 3.$ Το ενδεχόμενο X είναι τέτοιο ώστε

$$X \cap (A - B) = \emptyset$$

Επομένως $\omega_3 \notin X$. Ακόμα $X \cup (A - B) = \Omega$ άρα $X = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$

$$\text{Δηλαδή έχουμε } P(X) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

$\Gamma 4.$ Θεωρούμε ότι τα ενδεχόμενα Γ και X είναι ασυμβίβαστα. Επομένως θα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος $P(\Gamma \cup X) = P(X) + P(\Gamma) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} > 1$

Άρα τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι

$$P(A \cup \Gamma) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 \cdot (2 - \sqrt{x^2 - 5})}{5x^2 \cdot (3 - x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 \cdot [4 - (x^2 - 5)]}{5x^2 \cdot (3 - x) \cdot (2 + \sqrt{x^2 - 5})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 \cdot (3 - x) \cdot (3 + x)}{5x^2 \cdot (3 - x) \cdot (2 + \sqrt{x^2 - 5})} = \frac{9}{10}$$

Δ2. Ισχύει ότι $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{10} = \frac{3v - 1}{v^2 + 1} + \frac{2v - 1}{v^2 + 1} - \frac{v + 1}{v^2 + 1} \Leftrightarrow 9(v^2 + 1) = 10(3v - 1 + 2v - 1 - v - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9v^2 - 40v + 39 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 3 \text{ ή } v_2 = \frac{13}{9} \notin \mathbb{N}. \text{ Άρα } v = 3$$

Δ3. Επομένως έχουμε ότι $P(A) = \frac{8}{10}$, $P(\Gamma) = \frac{5}{10}$ και $P(A \cap \Gamma) = \frac{4}{10}$.

Άρα

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{8}{10} + \frac{5}{10} - 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{2}.$$

Δ4. Έχουμε ότι $P(A \cap \Gamma) = \frac{N(A \cap \Gamma)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{40}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega) = 100.$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ