ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Κεφάλαιο Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Τι λέγεται σύνολο;

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου

παράδειγμα:

- με N συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,
- με Z το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- με Q το σύνολο των ρητών αριθμών και
- με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο Α».

Για παράδειγμα

$\frac{3}{5} \notin \mathbb{N},\ \frac{3}{5} \in \mathbb{Q},\ -2 \in \mathbb{Z},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ κ.τ.λ.

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα και λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

β) Αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με: $\{x \in \Omega \mid x$ έχει την ιδιότητα Ι$\}$ και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Με άλλα λόγια: **«Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α».**

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε **Α = Β.**

<u>Υποσύνολα συνόλου</u>

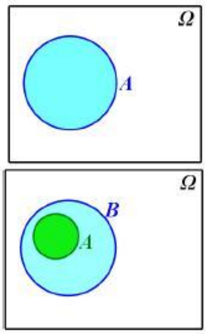
Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $Α \subseteq Β$. Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:
i) $Α \subseteq Α$, για κάθε σύνολο Α.
ii) Αν $Α \subseteq Β$ και $Β \subseteq Γ$, τότε $Α \subseteq Γ$.
iii) Αν $Α \subseteq Β$ και $Β \subseteq Α$, τότε $Α = Β$.

Το κενό σύνολο Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία και συμβολίζεται με ∅ ή { }.

<u>Διαγράμματα Venn</u>

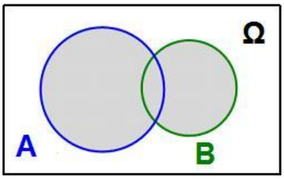
Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.



Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Αν $Α \subseteq Β$, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.

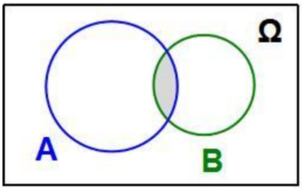
<u>Πράξεις με σύνολα</u>

- **Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με **AUB** .



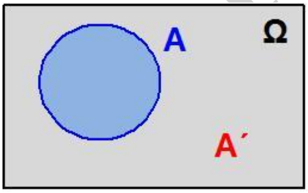
Δηλαδή είναι: **AUB = {x ∈ Ω| x ∈ A ή x ∈ B}**

- **Τομή δύο υποσυνόλων A, B** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω πουανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με **A ∩ B**



Δηλαδή είναι: **A ∩ B = {x ∈ Ω| x ∈ A και x ∈ B}**
Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν A ∩ B = ∅ , τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

- **Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με **A΄.**



Δηλαδή είναι: **A΄ = {x ∈ Ω | x∉A}**

1. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- **Πείραμα τύχης** (random experiment) ονομάζεται το πείραμα του οποίου δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνεται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

- **Δειγματικός Χώρος**Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (samplespace) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή ω_1, ω_2, ..., ω_κ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\kappa\}$.

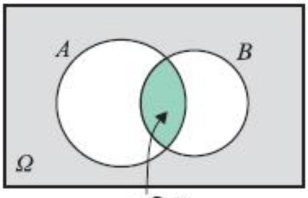
- **Ενδεχόμενα** Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται**ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στοΩ. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ∅ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το ∅ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α θα το συμβολίζουμε με Ν(Α)

Πράξεις με Ενδεχόμενα

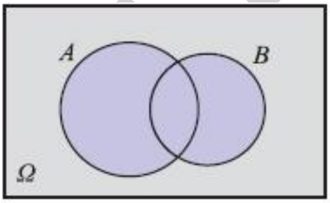
Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

- Το ενδεχόμενο Α ∩ Β , που διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται **συγχρόνως** τα Α**και** Β.



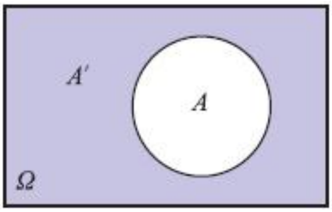
$A \cap B$

- Το ενδεχόμενο Α∪Β, που διαβάζεται "Α ένωση Β" ή "Α ή Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται **ένα τουλάχιστον** από τα Α, Β.

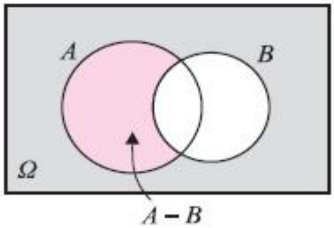


$A \cup B$

- Το ενδεχόμενο Α', που διαβάζεται "όχι Α" ή"συμπληρωματικό του Α" και πραγματοποιείται, όταν **δεν** πραγματοποιείται το Α. Το Α' λέγεται και**"αντίθετο του Α".**



- Το ενδεχόμενο Α - Β, που διαβάζεται**"διαφορά του Β από το Α"** και πραγματοποιείται, όταν **πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β**. Είναι εύκολο να δούμε ότι **Α-Β = Α ∩ Β'** .



- **Διάφορες σχέσεις για ενδεχόμενα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.**

Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται Συμβολικά $\omega \in A$

Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται Συμβολικά $\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)

Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται Συμβολικά $\omega \in A \cup B$

Πραγματοποιούνται αμφότερα τα Α και Β Συμβολικά $\omega \in A \cap B$

Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β Συμβολικά $\omega \in (A \cup B)'$

Πραγματοποιείται μόνο το Α Συμβολικά $\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)

Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β Συμβολικά $A \subseteq B$

- **Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα. Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$**. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας σε ένα πείραμα με **ισοπίθανα** στοιχειώδη αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$

2. $P(\emptyset) = \dfrac{0}{N(\Omega)} = 0$

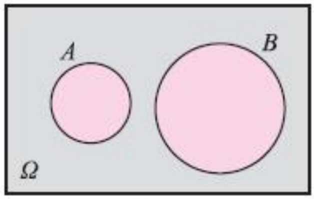
3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0 \le P(A) \le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$A\cup B$

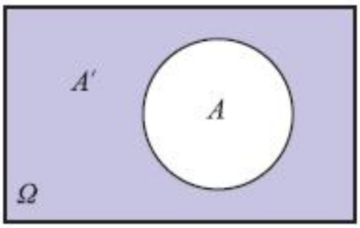
Αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, τότε το $A\cup B$ έχει $\kappa+\lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda= N(A)+N(B)$.
Επομένως:

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simplyadditivelaw) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει: $P(A')=1 - P(A)$

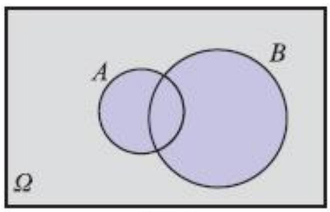
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή $A\cap A'=\emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο: $P(A\cup A')=P(A)+P(A')$ άρα $P(\Omega)=P(A)+P(A')$ άρα $1=P(A)+P(A')$. Οπότε $P(A')=1-P(A)$.

3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$A\cup B$

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$, (1) αφού στο άθροισμα N(A)+N(B) το πλήθος των στοιχείων του A∩B υπολογίζεται δυο φορές.

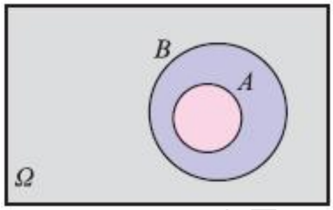
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με N(Ω) έχουμε: $\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$

και επομένωςP(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B)

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additivelaw).

4. Αν A⊆B, τότε P(A)≤P(B)

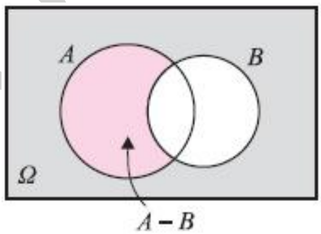
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή A⊆B έχουμε διαδοχικά: $N(A)\le N(B) \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A)\le P(B)$

5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:P(A-B)=P(A)-P(A∩B)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή τα ενδεχόμενα A-B και A∩B είναι ασυμβίβαστα και (A-B)∪(A∩B)=A,
έχουμε:P(A)=P(A-B)+P(A∩B) Άρα P(A-B)=P(A)-P(A∩B)

2. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους**άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**

Θυμίζουμε ότι:

- Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.
- Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.

Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

- Οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ και δηλ. ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους, η αφαίρεση και η διαίρεση.

- Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,\ \alpha \neq 0$

Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

- Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής: $\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$
  και $\alpha:\beta=\dfrac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\dfrac{1}{\beta}\left(\beta\neq 0\right)$

- Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1. $\boldsymbol{(\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta) \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta}$ δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2. $\boldsymbol{(\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta) \Rightarrow \alpha\gamma=\beta\delta}$ δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3. $\boldsymbol{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma}$ δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4. **Αν** $\boldsymbol{\gamma\neq 0}$**, τότε:** $\boldsymbol{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma}$ δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5. $\boldsymbol{\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0}$ δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν. Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη: $\boldsymbol{\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0 \text{ και } \beta\neq 0}$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν από την ισότητα $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ ή από την ισότητα $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ μεταβαίνουμε στην ισότητα $\alpha=\beta$, τότε λέμε ότι **διαγράφουμε** τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω $\alpha=1$. Τότε έχουμε διαδοχικά: $\alpha=1\Rightarrow\alpha\cdot\alpha=\alpha\cdot 1\Rightarrow\alpha^2=\alpha\Rightarrow\alpha^2-1=\alpha-1\Rightarrow$
$(\alpha+1)(\alpha-1)=(\alpha-1)\cdot 1\Rightarrow\alpha+1=1\Rightarrow\alpha=0$

Όμως έχουμε και $\alpha=1$, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα $(\alpha+1)(\alpha-1)=(\alpha-1)\cdot 1$ διαγράψαμε τον παράγοντα $(\alpha-1)$ ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Δυνάμεις

Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, τότε ορίζουμε:

$$\boldsymbol{\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\cdots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}}, \quad \text{για } \boldsymbol{\nu>1} \text{ και } \boldsymbol{\alpha^1=\alpha}, \quad \text{για } \boldsymbol{\nu=1}.$$

Αν επιπλέον είναι $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$, τότε ορίζουμε**:** $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$ και $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}}$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$

$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

Μέθοδοι απόδειξης

Α) Ευθεία Απόδειξη

1^o) Έστω ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:« Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ ».
Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 0$, είναι $\alpha = -(\beta + \gamma)$, οπότε θα έχουμε:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = [-(\beta + \gamma)]^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -(\beta + \gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -\beta^3 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - \cancel{\gamma^3} + \cancel{\beta^3} + \cancel{\gamma^3} =$$
$$= -3\beta\gamma(\beta+\gamma) = 3\left[-(\beta+\gamma)\right]\beta\gamma = 3\alpha\beta\gamma$$

2^o) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.
Για παράδειγμα, έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα: $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (y - \beta x)^2$
Έχουμε διαδοχικά:
$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 \Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 =$
$\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2 \Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 =$
$\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$, που ισχύει.

3^o) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα**αντιπαράδειγμα**. Έτσι ο ισχυρισμός «για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\alpha^2>\alpha$ » δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \dfrac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2 = \dfrac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2 < \alpha$.

Β) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:

«Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος», δηλαδή **«Αν ο $α^2$ είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»**

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:
Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή $α = 2κ + 1$, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:
$α^2 = (2κ + 1)^2 = 4κ^2 + 4κ + 1 = 2(2κ^2 + 2κ) + 1 = 2λ + 1$ (όπου $λ = 2κ^2 + 2κ$). Δηλαδή $α^2 = 2λ + 1$, $λ \in Z$, που σημαίνει ότι ο $α^2$ είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο $α^2$ είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα **ο α είναι άρτιος**.

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο**.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

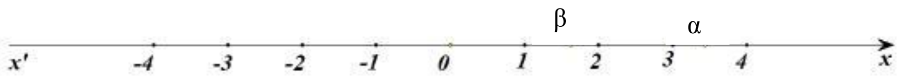
ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε $α>β$, όταν η διαφορά $α - β$ είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε **$β<α$**
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα: $\mathbf{α > β \Leftrightarrow α - β > 0}$

Γεωμετρικά η ανισότητα $α > β$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β .



Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $α > β$ ή $α = β$, τότε γράφουμε $α \geq β$ και διαβάζουμε: «**α μεγαλύτερος ή ίσος του β**».

Ιδιότητες των ανισοτήτων

1. $(α > 0$ και $β > 0) \Rightarrow α + β > 0$ και $(α < 0$ και $β < 0) \Rightarrow α + β < 0$

2. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0 > 0$ και α, β ετερόσημοι$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

3. $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)
Άρα αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$ και αν $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

4. ($\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$) $\Rightarrow \alpha > \gamma$

5. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

6. Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

7. Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

8. ($\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$) $\Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

9. Για θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή: ($\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$) $\Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

10. Γενικότερα ($\alpha_1 > \beta_1$ και $\alpha_2 > \beta_2$ και … και $\alpha_\nu > \beta_\nu$) $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$

11. Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί, τότε:
($\alpha_1 > \beta_1$ και $\alpha_2 > \beta_2$ και … και $\alpha_\nu > \beta_\nu$) $\Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$ (*)

12. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\alpha > \beta$. Τότε, από τη (*), για $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha > 0$ και $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = \beta > 0$,προκύπτει ότι: $\alpha^\nu > \beta^\nu$.
Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$ και $\alpha \leq \beta$. Τότε:αν ήταν $\alpha = \beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο). Άρα, $\alpha > \beta$.

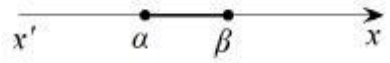
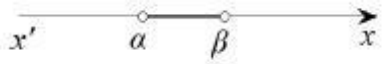
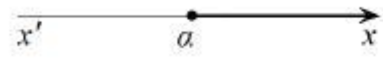
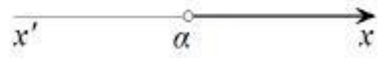
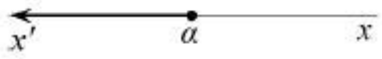
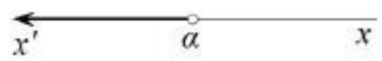
13. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$
Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha \neq \beta$.
Τότε: αν ήταν $\alpha > \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ
αν ήταν $\alpha < \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).
Άρα, $\alpha = \beta$.

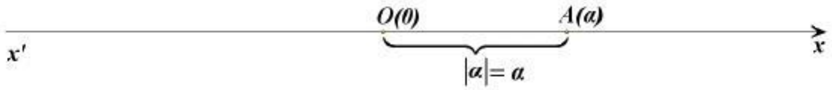
<u>Διαστήματα</u>

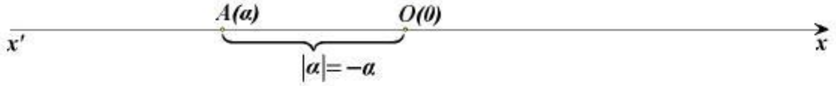
ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

	**$\alpha \le x \le \beta$**	**[α, β]** $x \in [\alpha, \beta)$
	**$\alpha \le x < \beta$**	**[α, β)** $x \in [\alpha, \beta)$
	**$\alpha < x \le \beta$**	$x \in$ **(α, β]**
	**$\alpha < x < \beta$**	$x \in$ **(α, β)**
	**$x \ge \alpha$**	$x \in$ **[α, +∞)**
	**$x > \alpha$**	$x \in$ **(α, +∞)**
	**$x \le \alpha$**	$x \in$ **(-∞, α]**
	**$x < \alpha$**	$x \in$ **(-∞, α)**

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ αν } \alpha \ge 0 \\ \alpha, \text{ αν } \alpha < 0 \end{cases}$





Δηλαδή:

- **Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.**
- **Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.**
- **$|0| = 0$**

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

1. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
2. $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
3. Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
4. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
5. $|\alpha|^2 = \alpha^2$
6. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$, που ισχύει.

7. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

8. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$, που ισχύει.

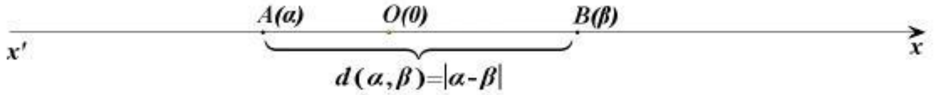
Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα: $|α_1 \cdot α_2 \cdot ... \cdot α_ν| = |α_1| \cdot |α_2| \cdot ... \cdot |α_ν|$
- Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $α_1 = α_2 = ... = α_ν = α$, έχουμε: $\mathbf{|α^ν| = |α|^ν}$
- Η ανισότητα $|α + β| \le |α| + |β|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα: $|α_1 + α_2 + ... + α_ν| \le |α_1| + |α_2| + ... + |α_ν|$

Απόσταση δυο αριθμών

Ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.



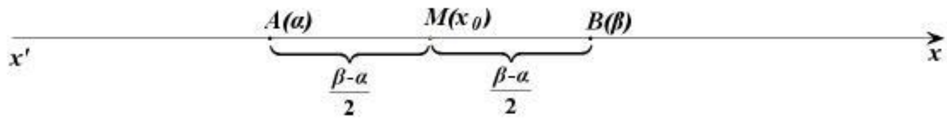
Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με **d(α,β)** και είναι ίση με **|α- β|.** Είναι δηλαδή: $\mathbf{d(α, β) = |α - β|}$

Προφανώς ισχύει $d(α, β) = d(β, α)$.

Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $α<β$, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με $β - α$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος $[α, β]$.

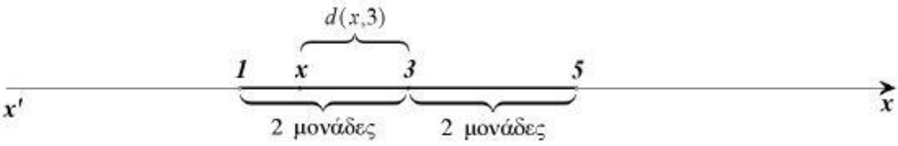
Μέσον τμήματος

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα $[α, β]$ και ας ονομάσουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



Αν $Μ (x_0)$ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε $(ΜΑ) = (ΜΒ) \Leftrightarrow d(x_0, α) = d(x_0,β)$ $\Leftrightarrow |x_0 - α| = |x_0 - β| \Leftrightarrow x_0 - α = β - x_0$, (αφού $α<x_0<β$) $\Leftrightarrow 2x_0 = α + β \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{α+β}{2}$

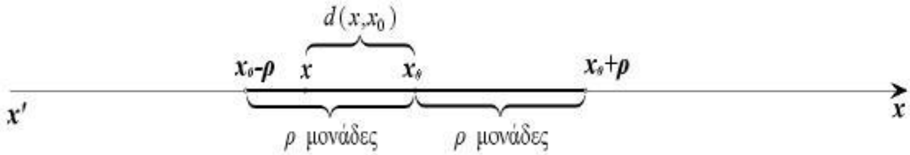
- Ο αριθμός $\dfrac{α+β}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται **κέντρο** του διαστήματος $[α, β]$
- ο αριθμός $ρ = \dfrac{β-α}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του $[α, β]$.
- Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων $(α, β)$, $[α, β)$ και $(α, β]$ ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος $[α, β]$.
- Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3|<2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:
$|x - 3|<2 \Leftrightarrow d\,(x,3)<2 \Leftrightarrow 3 - 2<x<3 + 2 \Leftrightarrow x \in (3 - 2,\, 3 + 2)$

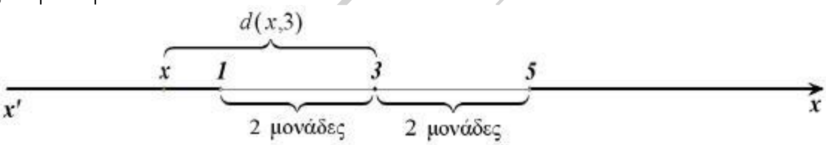
Γενικά: Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει: $|x - x_0|<\rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho,\, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho<x<x_0 + \rho$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0|<\rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0 - \rho,\, x_0 + \rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



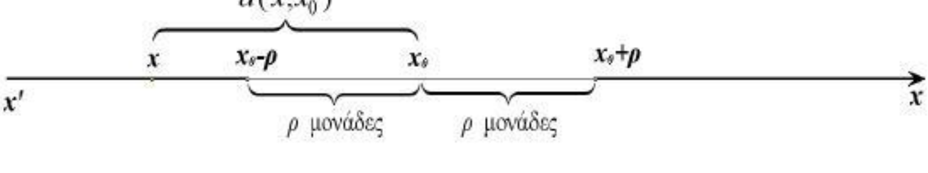
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε: $|x|<\rho \Leftrightarrow x \in (-\rho,\, \rho) \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$.
Για παράδειγμα $|x|<2 \Leftrightarrow x \in (-2,\, 2) \Leftrightarrow -2<x<2$.

- Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3|>2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:
$|x - 3|>2 \Leftrightarrow d\,(x,3)>2 \Leftrightarrow x< 3 - 2$ ή $x> 3 + 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,\, 3 - 2) \cup (3 + 2,\, +\infty)$.

Γενικά: Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει: $|x - x_0|<\rho \Leftrightarrow x \in (-\infty,\, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho,\, +\infty) \Leftrightarrow x<x_0 - \rho$ ή $x>x_0 + \rho$ Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0|>\rho$ αντιστοιχούν σε σημεία Μ(x) του άξονα x΄x που απέχουν από το σημείο $K(x_0)$ απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, **έχουμε: $|x|>\rho \Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x>\rho$**

Για παράδειγμα: $|x|>2 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$.

<u>2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Άρα **αν α>0, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.**

Ιδιότητες

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Ορίζουμε $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$

Άρα αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Ιδιότητες των ριζών

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$

2. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

3. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^\nu \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$

που ισχύει.

4. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ και με $\beta \neq 0$

5. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu}=\left(\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu} \Leftrightarrow \left(\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right)^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha$ που ισχύει

6. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

7. Έχουμε: $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\left(\alpha^{\mu}\right)^{\rho}}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

8. για μη αρνητικούς αριθμούς α_1, α_2, ... , α_κ ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha_1}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_x}=\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_x}$

9. Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa = \alpha>0$, ισχύει:
$\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}$

10. για α , $\beta \geq 0$ έχουμε $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1α ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η Εξίσωση αx + β = 0

Α) $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta = -\beta \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$
Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε: $\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

  Άρα , αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:
  i. αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη,** ενώ

ii. αν είναι β = 0 έχει τη μορφή 0x = 0 και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης αx + β = 0 και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Β) Αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης αx + β = 0 εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων τότε τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**. Για παράδειγμα η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα $(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

Επομένως

- Αν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \dfrac{\lambda - 1}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \dfrac{1}{\lambda+1}$
- Αν λ = -1, η εξίσωση γίνεται 0x = -2 και είναι αδύνατη.
- Αν λ = 1, η εξίσωση γίνεται 0x = 0 και είναι ταυτότητα.

3.1β Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

- **Με παραγοντοποίηση μορφής $(\alpha_1 \chi+\beta_1)\ (\alpha_2 \chi+\beta_2)\ (\alpha_3 \chi+\beta_3)\ \ldots\ldots(\alpha_\nu \chi+\beta_\nu) = 0$ οπότε $(\alpha_1 \chi+\beta_1) = 0$ ή $(\alpha_2 \chi+\beta_2) = 0$ ή $(\alpha_3 \chi+\beta_3) = 0$ ή …… ή $(\alpha_\nu \chi+\beta_\nu) = 0$**
- **Κλασματικές**
- **Με απόλυτες τιμές** της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$ Οπότε λύνουμε τις $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ και της μορφής $|f(x)| = g(x)$ Οπότε με $g(x) \geq 0$ συναληθεύουμε με τις $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = - g(x)$

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$

- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α>0 και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α<0 και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{-\alpha}$
- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α>0 και ν άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α<0 και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη
- Αν ο ν <u>περιττός</u> τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει μοναδική λύση, την x = α
- Αν ο ν <u>άρτιος</u> τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$.

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ (1)

Έχουμε:

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0 \overset{\text{διαιρούμε με α που είναι } \neq 0}{\Leftrightarrow} \chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \chi^2+2\chi\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \chi^2+2\chi\frac{\beta}{2\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2$ - $4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται: $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ (2)

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν **Δ> 0**, τότε έχουμε: $x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Δηλαδή $x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

- Αν **Δ = 0**, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \text{ ή } \chi+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \Leftrightarrow \chi=-\frac{\beta}{2\alpha} \text{ ή } \chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$

- Αν **Δ<0**, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Η αλγεβρική παράσταση **$\Delta = \beta^2$ - $4\alpha\gamma$**, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.
Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2$ - $4\alpha\gamma$	**Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$**
Δ > 0	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Δ = 0	Έχει μια διπλή ρίζα τη $-\frac{\beta}{2\alpha}$
Δ < 0	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

τύποι Vieta

Αν με *S* συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους: $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \overset{\text{διαιρούμε με α που είναι } \neq 0}{\Leftrightarrow} \chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 - (\chi_1 + \chi_2)\chi + \chi_1\chi_2 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - S\chi + P = 0$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

- Μορφής $\alpha(f(\chi))^2 + \beta|f(\chi)| + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ που γίνεται $\alpha|f(\chi)|^2 + \beta|f(\chi)| + \gamma = 0$ δευτέρου βαθμού με άγνωστο καταρχή το $|f(\chi)|$
- Κλασματικές
- **Μορφής** $\alpha(f(x))^2 + \beta\,(f(x)) + \gamma = 0$ δευτέρου βαθμού με άγνωστο καταρχή το f(x)
- **Διτετράγωνεςμορφής** $\alpha(f(x))^{2\nu} + \beta\,(f(x))^{\nu} + \gamma = 0$ δευτέρου βαθμού με άγνωστο καταρχή το $(f(x))^{\nu}$

4. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις: αx + β>0 και αx + β<0

$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta > -\beta \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν α>0, τότε: $\alpha\chi > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha\chi}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \chi > \frac{-\beta}{\alpha}$

- Αν α<0, τότε: $\alpha\chi > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha\chi}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \chi < \frac{-\beta}{\alpha}$ Προσοχή αλλάζει η φορά.
- Αν α = 0, τότε η ανίσωση γίνεται 0x>-β, η οποία
- αληθεύει για κάθε x∈ℝ, αν είναι β>0,
- είναι αδύνατη, αν είναι β<0 .

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

- με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$ *ή της* $|x - x_o| < \rho \Leftrightarrow x_o - \rho < x < x_o + \rho$
- με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$

<u>4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ</u>

<u>Μορφές τριωνύμου</u>

Η παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο**. Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, δηλαδή οι $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου**.

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha}) = \alpha\left[\chi^2 + 2\chi\frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{4\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{4\alpha}\right)^2\right] = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]$$

Επομένως: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$ (1)

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- **Δ>0** . Τότε ισχύει $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, οπότε έχουμε:

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] =$$

$$\alpha\left[\chi + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]\left[\chi + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right] = \alpha\left[\chi - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]\left[\chi - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]$$

Επομένως: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)}$ **,** όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του *α* επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

- **Δ = 0** . Τότε από την ισότητα (1) έχουμε: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

Άρα, όταν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

- **Δ<0** . Τότε ισχύει $|\Delta| = -\Delta$, οπότε έχουμε: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

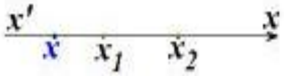
<u>Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου</u>

Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

- Αν **Δ>0**, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)}$ **,** όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου

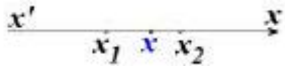
Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

Παρατηρούμε ότι: Αν $x < x_1 < x_2$ (Σχήμα) , τότε $x - x_1 < 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.



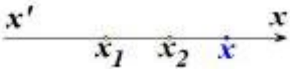
Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του *α* .

Αν $x_1 < x < x_2$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Επομένως,



λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του *α*

Αν $x_1 < x_2 < x$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως,



λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του *α*

- Αν **Δ = 0**, τότε ισχύει: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του *α* για κάθε πραγματικό $\chi \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$

- Αν **Δ<0**, τότε ισχύει: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x.
Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα: Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** , μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν,** όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Αρα

- **για να είναι ένα τριώνυμο <u>θετικό</u> ΠΑΝΤΟΤΕ πρέπει $\Delta<0$ και $\alpha>0$**
- **για να είναι ένα τριώνυμο <u>αρνητικό</u> ΠΑΝΤΟΤΕ πρέπει $\Delta<0$ και $\alpha<0$**

Ανισώσεις της μορφής $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma > 0$ ή $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma < 0$

Βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ και κρατάμε το διάστημα στο οποίο γίνεται >0 ή <0 αντίστοιχα

<u>Πρόοδοι</u>

5.1 Ακολουθίες

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1,2,3,…,ν,… στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται**δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται **ν-οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας και το συμβολίζουμε συνήθως με α_ν. Δηλαδή, $1\rightarrow \alpha_1$, $2\rightarrow \alpha_2$, $3\rightarrow\alpha_3$, …, $\nu\rightarrow\alpha_\nu$, … Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν).

<u>Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά</u>

για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

i. Τον αναδρομικό της τύπο πχ $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ και
ii. Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

<u>5.2 Αριθμητική πρόοδος</u>

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.
Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε διαφορά της προόδου.

Επομένως, η ακολουθία (αν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ ή $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$

Ο νος όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$
$$\alpha_4 = \alpha_3 = \omega$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει: $\beta-\alpha=\omega$ και $\gamma-\beta=\omega$, επομένως $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ ή $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$, τότε έχουμε $2\beta=\alpha+\gamma$ ή $\beta-\alpha=\gamma-\beta$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (αν) με διαφορά ω είναι

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(\alpha_1+\alpha_\nu\right) \quad \text{ή} \quad S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+\left(\nu-1\right)\omega\right]$$

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγο της προόδου**. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\lambda+1} = \alpha \cdot \lambda \quad ή \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

Ο νος όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu}$-1

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_1\lambda \\ \alpha_3 &= \alpha_2\lambda \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2}\lambda \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1}\lambda \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$

<u>Γεωμετρικός μέσος</u>

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta} = \lambda$, επομένως $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ ή $\beta^2 = \alpha\gamma$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ $\neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι: Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

<u>Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου</u>

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (αν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι

$$S_\nu = \alpha \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-2} + \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ και έχουμε:

$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu$ (2)

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$ ή $(\lambda - 1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$

Επομένως, αφού $\lambda \neq 1$, έχουμε: $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$,

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι λ=1, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$ αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

6^0 ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΤΡΗΣΕΩΝ

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

• Ορισμός:

Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του ℝ. Ονομάζουμε **συνάρτηση** από ένα σύνολο Α σ΄ένα σύνολο Β μια διαδικασία (κανόνας) με τη οποία κάθε στοιχείο x του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο y του συνόλου Β.
Το σύνολο **Α** λέγεται **πεδίο ορισμού** της f.
Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Το γράμμα **x** λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή,** ενώ το γράμμα λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

2. Το **πεδίο ορισμού** **Α** της f συμβολίζεται με $\mathbf{A_f}$ **.**

Αν η συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της,πεδίο ορισμού της θεωρείται το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους η τιμή f(x) να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.Συμβολικά γράφουμε: $\mathbf{A_f = \{x \in \mathbb{R}: y = f(x) \in \mathbb{R}\}}$

3. Το σύνολο τιμών της f συμβολίζεται με f(A) και είναι το σύνολο που στοιχεία του είναι οι τιμές της f για κάθε x∊A.

4. Μία συνάρτηση λέμε ότι είναι **ορισμένη** όταν γι΄αυτήν γνωρίζουμε:
- Το **πεδίο ορισμού** της Α
- Τον **τύπο** της f(x)

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

•Ορισμός:

Γραφική παράσταση της f με πεδίο ορισμού το Α που συμβολίζεται με C_f είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που αντιστοιχούν στα ζεύγη (χ, f(x)), x∊A.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Η C_f τέμνει τον x΄x στα σημεία $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,…όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0.

2. ΗC_f τέμνει τον y΄y στο σημείο Α(0,f(0)),όταν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

3. Για να βρούμε τις τιμές του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x λύνουμε την ανίσωση f(x) > 0 και συναληθεύουμε τις λύσεις με το πεδίο ορισμού.Ενώ όταν ψάχνουμε για τις τιμές του x που η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x λύνουμε την ανίσωση f(x) < 0.

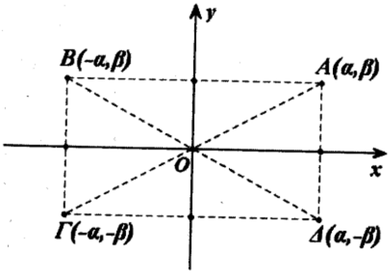
4. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g λύνουμε την εξίσωση f(x) = g(x) και συναληθεύουμε τις λύσεις στο σύνολο $A_f \cap A_g$.

5. Για να βρούμε τις τιμές x που η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g λύνουμε την f(x) > g(x) και συναληθεύουμε τις λύσεις στο $A_f \cap A_g$.

Ενώ λύνουμε την f(x) < g(x) αν η C_g είναι πάνω από την C_f .

• **Ορθοκανονικό Σύστημα Συντεταγμένων**

Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς είναι το σύστημα των δύο κάθετα τεμνομένων αξόνων x΄x και y΄y με κοινή αρχή το 0.



Σχήμα α΄

Ορθοκανονικό είναι το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, που οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος.

Έστω το σημείο Α του καρτεσιανού επιπέδου
Οι αριθμοί α,β λέγονται συντεταγμένες του σημείου Α
Ο αριθμός α λέγεται τετμημένη του σημείου Α.
Ο αριθμός β λέγεται τεταγμένη του σημείου Α.
Τα σημεία Β, Δ , Γ είναι τα συμμετρικά του σημείου Α, ως προς τον άξονα y΄ y τον άξονα x΄x και την αρχή των αξόνων 0 αντίστοιχα.

•ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

Η απόσταση δυο σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνεται απ' τον τύπο

$$\textbf{(AB)}= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

<u>6.3 Η Συνάρτηση f(x)=αx+β</u>

• Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **f(x)=αx+β** είναι ευθεία που:
1. Τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,β)
2. Τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (-β/α,0)
3. Σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω, για την οποία εφω=α

• **Συντελεστής διεύθυνσης (κλίση)** της ευθείας y=αx+β λέγεται ο αριθμός **λ=α=εφω**, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.

1. Αν α>0 τότε $0^o < \widehat{\omega_1} < 90^o$
2. Αν α<0 τότε $90^o < \widehat{\omega_2} < 180^o$
3. Αν α=0 τότε $\hat{\omega}_3 = 0^o$

Επίσης ,η κλίση δίνεται από τον τύπο **: λ=** $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

• Η γρ.παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx είναι η γρ. παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx+β μετατοπισμένη παράλληλα ώστε να διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων

• Για τις ευθείες **ε_1:y=α_1χ+β_1** και **ε_2: y=α_2χ+β_2** ισχύει:

1. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ 2. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 = -1$

7^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7.1 Μελέτη της Συνάρτησης f(x) = αx^2

• **Πεδίο Ορισμού**: A= ℝ

• **Σύνολο Τιμών**: $\begin{cases} f(A) = [0,+\infty), \alpha\nu\alpha > 0 \\ f(A) = (-\infty,0], \alpha\nu\alpha < 0 \end{cases}$

•**Συμμετρίες**: Για κάθε χ∊ℝ και το -x∊ℝ. Επίσης $f(-x)=\alpha(-x)^2=\alpha x^2=f(x)$

Άρα,η f είναι **άρτια** στο ℝ.

• **Σημεία τομής με Άξονες**: Για x=0 έχουμε y=0. Έτσι η παραβολή διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) και δεν τέμνει τους άξονες σε κανένα άλλο σημείο.

• **Μονοτονία**: Η μονοτονία της $f(x)=\alpha x^2$ εξαρτάται από το α

1. Αν α>0 τότε f γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0] και γνησίως αύξουσα στο [0,+∞).
2. Αν α<0 τότε γνησίως αύξουσα στο (-∞,0] και γνησίως φθίνουσα στο [0,+∞).

• **Ακρότατα**: Για την f ισχύει:

1. Αν α>0 έχει ελάχιστο στο x=0 το y=0
2. Αν α<0 έχει μέγιστο στο x=0 το y=0

• **Γραφική Παράσταση**: Η γραφική παράσταση έχει εξίσωση $y=\alpha x^2$ και παριστάνει μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή**. Έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y και κορυφή την αρχή των αξόνων. Όταν α>0 βρίσκεται πάνω απ' τον άξονα x'x ενώ αν α<0 τότε είναι κάτω απ' τον άξονα x'x.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Η παραβολή δεν έχει ασύμπτωτες.
2. Για αντίθετες τιμές του α έχουμε δύο παραβολές συμμετρικές ως προς τον χ'χ.

3. Καθώς μεγαλώνει η $|\alpha|$ η παραβολή γίνεται πιο «κλειστή»
4. Καθώς μικραίνει η $|\alpha|$η παραβολή γίνεται πιο «ανοικτή».

7.3 Συνάρτηση f(x)=αx²+βx+γ

•**Πεδίο ορισμού** Α=ℝ

• **Σύνολο τιμών**: $\begin{cases} f(A) = \left[-\frac{\Delta}{4\alpha}, +\infty\right), \alpha\nu \alpha > 0 \\ f(A) = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right], \alpha\nu \alpha < 0 \end{cases}$

• **Συμμετρίες**: Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία χ=- $\frac{\beta}{2\alpha}$

• **Σημεία τομής με τους Άξονες**:

Η παραβολή διέρχεται από το (0, γ) του y'y και από τα $\left(\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{-2\alpha}, 0\right), \left(\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$ του x΄x

αν Δ >0, εφάπτεται του x΄x στη $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, 0\right)$ αν Δ=0, δεν τέμνει τον x΄x αν Δ<0.

• **Μονοτονία**: Η μονοτονία της f(x)=αχ²+βχ+γ εξαρτάται από το α
Αν α > 0 τότε f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$.
Αν α < 0 τότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$.

• **Ακρότατα:** Για την f ισχύει ότι:

1. Αν α > 0 έχει ελάχιστο για x=$-\frac{\beta}{2\alpha}$, το f $(-\frac{\beta}{2\alpha})$= $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

2. Αν α < 0 έχει ελάχιστο για χ= $-\frac{\beta}{2\alpha}$, το f $(-\frac{\beta}{2\alpha})$= $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

•**Γραφική Παράσταση**: Η γραφική παράσταση έχει εξίσωση y = αx² + βx + γ και παριστάνει μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή.** Έχει κορυφή το σημείο $(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1ο Κεφάλαιο

1. Για τα ενδεχόμενα Α,Β ενός πειράματος τύχης γνωρίζουμε ότι:
• η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α είναι 0.6
• η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το Β είναι 0.25
• η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και το Α και το Β είναι 0.45
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
α) Να μην πραγματοποιηθεί το Α.
β) Να πραγματοποιηθεί το Β.
γ) Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α ,Β.

δ) Να πραγματοποιηθεί το Β αλλά όχι το Α.
ε) Να πραγματοποιηθεί ένα ακριβώς από τα Α,Β.
στ) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α,Β.
ζ) Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α,Β.

Λύση:

Από τα δεδομένα ισχύει: $P(A) = 0.6$ $P(B') = 0.25$ $P(A \cap B) = 0.45$

Τα ενδεχόμενα των οποίων ζητείται η πιθανότητα είναι:

α) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$

β) $P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0.25 = 0.75$

γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.75 - 0.45 = 0.9$

δ) $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.75 - 0.45 = 0.3$

ε) $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$

$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.6 + 0.75 - 2 \cdot 0.45 = 0.45$

στ) $P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$

ζ) $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.45 = 0.55$

2. Έστω Α,Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με P(A) = 0.46 και P(B) = 0.25. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
α) $P(A \cap B)$ β) $P(A \cup B)$ γ) $P(A-B)$ δ) $P(B-A)$

Λύση:

α) Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα,δεν έχουν κοινά σημεία οπότε $P(A \cap B) = 0$

β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.46 + 0.25 = 0.71$

γ) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.46 - 0 = 0.46$

δ) $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.25 - 0 = 0.25$

3. Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.
1. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
2. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων
Α: Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .
Β: Να διαγωνίστηκε η Ζωή.
Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

Λύση:

1. Θα βρούμε το δειγματικό χώρο Ω με πίνακα διπλής εισόδου:

Α \ Γ	Δ	Κ	Μ
Ε	ΕΔ	ΕΚ	ΕΜ
Ζ	ΖΔ	ΖΚ	ΖΜ

Επομένως: $\Omega = \{\text{ΕΔ}, \text{ΕΚ}, \text{ΕΜ}, \text{ΖΔ}, \text{ΖΚ}, \text{ΖΜ}\}$ και $N(\Omega) = 6$

2. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- Κ: διαγωνίστηκε ο Κώστας, με $K = \{\text{ΕΚ}, \text{ΖΚ}\}$ και $N(K) = 2$
- Μ: διαγωνίστηκε ο Μιχάλης, με $M = \{\text{ΕΜ}, \text{ΖΜ}\}$ και $N(M) = 2$
- Δ: διαγωνίστηκε ο Δημήτρης, με $\Delta = \{\text{ΕΔ}, \text{ΖΔ}\}$ και $N(\Delta) = 2$
- Β : διαγωνίστηκε η Ζωή, με $B = \{\text{ΖΔ}, \text{ΖΚ}, \text{ΖΜ}\}$ και $N(B) = 3$

Τότε:

- ✓ $K \cup M = \{\text{ΕΚ}, \text{ΖΚ}, \text{ΕΜ}, \text{ΖΜ}\}$ με $N(K \cup M) = 4$, και
- ✓ $K \cup \Delta = \{\text{ΕΚ}, \text{ΖΚ}, \text{ΕΔ}, \text{ΖΔ}\}$ με $N(K \cup \Delta) = 4$

Άρα:

- ✓ $P(A) = P(K \cup M) = \dfrac{N(K \cup M)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$,
- ✓ $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$$P(\Gamma) = P(K \cup \Delta)' = 1 - P(K \cup \Delta) = 1 - \frac{N(K \cup \Delta)}{N(\Omega)} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

4. Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:
Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και
Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

1. να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i. $A \cup B$ **ii.** $A \cap B$ **iii. Β – Α** **iv. Α΄**

2. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων
i. ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου
ii. ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 13)

Λύση:

1. i. Ο μαθητής να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα ή την ποδοσφαιρική ομάδα.
ii. Ο μαθητής να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα και στην ποδοσφαιρική ομάδα.
iii. Ο μαθητής να συμμετέχει στην ποδοσφαιρική ομάδα αλλά όχι στην θεατρική ομάδα.
iv. Ο μαθητής να μην συμμετέχει στην θεατρική ομάδα.

2. Από την υπόθεση της άσκησης γνωρίζουμε ότι:

$$P(A)=25\%, P(B)=30\%, P(A\cap B)=15\% .$$

i. Αναζητούμε ην πιθανότητα του ενδεχομένου $B-A$.

Είναι $P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=30\%-15\%=15\%$

ii. Αναζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A\cup B)'$

Είναι $P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=$

$=1-0,25-0,30+0,15=0,60$ ή 60%

5. Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.
Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων.
Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος.
Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιος του 3.
Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιος του 3.
Λύση:

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από εννέα αριθμούς και είναι ο

$$\Omega=\{11\ ,12\ ,13\ ,21\ ,22\ ,23\ ,31\ ,32\ ,33\}$$

- ✓ Οι διψήφιοι άρτιοι αριθμοί του Ω είναι οι $12\ ,\ 22\ ,\ 32$ άρα το ενδεχόμενο A είναι το $A=\{12\ ,\ 22\ ,\ 32\}$ και η πιθανότητα του είναι $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$
- ✓ Από τα στοιχεία του συνόλου Α μόνο ο 12 διαιρείται με το 3, άρα το ενδεχόμενο B είναι το $B=\{12\}$ και η πιθανότητα του B είναι $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{9}$

- ✓ Οι αριθμοί του Ω που είναι πολλαπλάσια του 3 είναι οι $12, 21, 33$ ενώ οι άρτιοι είναι οι $12, 22, 32$ άρα το ενδεχόμενο Γ είναι το $\Gamma = \{12, 21, 22, 32, 33\}$ και η πιθανότητα του Γ είναι: $P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{9}$

6. Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:
«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με x-1 μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε x+3 σειρές με x-3 μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».
1. Να βρείτε την τιμή του x.
2. Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.
3. Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

Λύση:

1. Το πλήθος των μαθητών είναι: x(x - 1) ή (x+3)(x - 3) - 1
Επομένως: x(x-1) = $(x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 9 - 1 \Leftrightarrow x = 10$

2. Για x = 10 έχουμε: $10 \cdot (10-1) = 90$ $10 \cdot (10-1) = 90$

3. Το πλήθος των μαθητών στις ομάδες εργασίας αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$, $\omega = 2$ και $S_\nu = 90$.

Τότε: $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$

$$\Rightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 2 + (\nu-1)\cdot 2\right] = 90 \Leftrightarrow 2\nu^2 + 2\nu - 180 = 0 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) = 361$ και ρίζες,

$\nu_1 = \dfrac{-1+\sqrt{361}}{2} = 9$ και $\nu_2 = \dfrac{-1-\sqrt{361}}{2} = -10$ η οποία απορρίπτεται αφού ο ν είναι φυσικός. Άρα θα δημιουργηθούν 9 ομάδες εργασίας.

<u>2^o ΚΕΦΑΛΑΙΟ</u>

7. Να λυθεί η εξίσωση (x - 1)^2 + (2y - 6)^2 = 0

Λύση:

Πρέπει : $(x-1)^2 = 0$ και $(2y-6)^2 = 0$. Άρα x-1=0 και 2y-6 = 0.Επομένως, x = 1 και y = 3.

8. Να αποδείξετε ότι : $(\alpha+2)^2 + (\alpha - 2)^2 = 2(\alpha + 1)^2 - 2(2\alpha - 3)$

Λύση:

$(\alpha+2)^2+(\alpha-2)^2=2(\alpha+1)^2-2(2\alpha-3) \Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha+4+\alpha^2-4\alpha+4=2(\alpha^2+2\alpha+1)-4\alpha+6 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2+8=2\alpha^2+4\alpha+2-4\alpha+6 \Leftrightarrow 2\alpha^2+8=2\alpha^2+8$, ισχύει.

9. Να αποδείξετε ότι : $\beta(\beta-4\alpha)+\alpha(2\beta+\alpha)\geq 0$

Λύση:

$\beta(\beta-4\alpha)+\alpha(2\beta+\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\beta+2\alpha\beta+\alpha^2\geq 0 \Leftrightarrow \beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2\geq 0 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)^2\geq 0$, ισχύει

10. Αν $2<\alpha<4$ και $2<\beta<3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης
α) α+β β) 2α+3β γ) α-β

Λύση :

α) $2< \alpha < 4$

$2< \beta < 3$

Προσθέτουμε κατά μέλη και προκυπτει $4<\alpha+\beta<7$

β) Παίρνουμε την ανισότητα $2<\alpha<4$ και την πολλαπλασιάζουμε με το 2.
Οπότε γίνεται: $4 < 2\alpha < 8$ (1)
Μετά παίρνουμε την άλλη ανισότητα και την πολλαπλασιάζουμε με το 3 και γίνεται:
$6 < 3\beta < 9$ (2)
Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε: $10<2\alpha+3\beta<17$

γ) Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη ανισότητα με το -1,αλλάζει η φορά και γίνεται:
$-2>-\beta>-9 \Leftrightarrow -9<-\beta<-2$ (3).
Προσθέτουμε τις ανισότητες κατά μέλη και έχουμε:
$2 < \alpha < 4$
$-9 < -\beta < -2$ και προκυπτει $-7 < \alpha-\beta < 2$

11. Αν $\alpha > \beta > 0$, τότε να γραφεί χωρίς απόλυτα η παράσταση:
$A=|\beta-\alpha|+|2\alpha|-|3\beta+2|+6$

Λύση:

Πρέπει να εξετάσουμε αν κάθε ποσότητα που βρίσκεται σε απόλυτο είναι θετική ή αρνητική.
Αφού $\alpha>\beta$, τότε $\beta-\alpha<0$ (1)
Αφού $\alpha>0$, τότε $2\alpha>0$ (2)
Αφού $\beta>0$, τότε $3\beta>0$, άρα και $3\beta+2>0$
Οπότε η παράσταση γίνεται:

$$A=-\beta+\alpha+2\alpha-(3\beta+2)+6$$
$$A=-\beta+\alpha+2\alpha-3\beta-2+6$$
$$A=3\alpha-4\beta+4$$

12. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ βρείτε χωρίς απόλυτα την παράσταση: $A=|\alpha-\beta|-|\gamma-\alpha|+|2\alpha-\beta-\gamma|$

Λύση:

Ισχύουν:

- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$, άρα $|\alpha-\beta|=-\alpha+\beta$
- $\gamma>\alpha \Leftrightarrow \gamma-\alpha>0$, άρα $|\gamma-\alpha|=\gamma-\alpha$
- $\left.\begin{matrix}\alpha<\beta\\ \text{και}\\ \alpha<\gamma\end{matrix}\right\}$ άρα $2\alpha<\beta+\gamma \Leftrightarrow 2\alpha-\beta-\gamma<0$ άρα $|2\alpha-\beta-\gamma|=-2\alpha+\beta+\gamma$

Τελικά είναι: $A=-\alpha+\beta+\gamma-\alpha+2\alpha-\beta-\gamma \Leftrightarrow A=\alpha$.

13. Βρείτε τα x, y εφόσον ισχύει $|2x-y-3|+|x+2y-4|=0$

Λύση:

$|2x-y-3|+|x+2y-4|=0 \Leftrightarrow 2x-y-3=0$ και $x+2y-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-y=3$ και $x+2y=4$, οπότε λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-2y=6\\x+2y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=10\\y=2x-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

14. Δείξτε την ισοδυναμία $|2\alpha+5\beta|=|5\alpha+2\beta| \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta|$

Λύση:

$|2\alpha+5\beta|=|5\alpha+2\beta| \Leftrightarrow 2\alpha+5\beta=5\alpha+2\beta$ ή $2\alpha+5\beta=-5\alpha-2\beta \Leftrightarrow$
$3\beta=3\alpha$ ή $7\alpha=-7\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta|$

15. Αν $|x|<1$ και $|y|<2$ δείξτε ότι $|2x+3y|<8$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} &|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1 \quad \text{άρα} \quad -2<x<2 \\ &|y|<2 \Leftrightarrow -2<y<2 \quad \text{άρα} \quad -6<3y<6 \end{aligned}\right\} \text{άρα} \quad -8<2x+3y<8$$

Οπότε και $|2x+3y|<8$

16. Να αποδείξετε ότι:
i) $(\sqrt{8}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32})=-14$
ii) $(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})\cdot\sqrt{63}-\sqrt{32})=31$

Λύση:

Αναλύουμε τη ρίζα $\sqrt{8}$ ως εξής: $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$
Με τον ίδιο τρόπο αναλύονται και οι υπόλοιπες ρίζες και έχουμε:

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$$
$$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{28}=\sqrt{4\cdot 7}=2\sqrt{7}$$
$$\sqrt{63}=\sqrt{9\cdot 7}=3\sqrt{7}$$

i) $(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32})=(2\sqrt{2}-3\sqrt{2})(5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2})=(-\sqrt{2})(7\sqrt{2})=-7\cdot 2=-14$
ii) $(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})(\sqrt{63}-\sqrt{32})=(2\sqrt{7}+\sqrt{7}+4\sqrt{2})(3\sqrt{7}-4\sqrt{2})=$
$(3\sqrt{7}+4\sqrt{2})(3\sqrt{7}-4\sqrt{2})=(3\sqrt{7})^2-(4\sqrt{2})^2=9\cdot 7-16\cdot 2=63-32=31$

17. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=2.5$

Λύση:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2-\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{3+7}{7-3}=\frac{10}{4}=2.5$$

3^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

18. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
i) |x-3|=2 ii) |2x-3|=|x-2| iii) |x-3|=3x-2 iv) |3x-2|=x-3

Λύση:

i) |x-3|=2⟺ x-3=2 ή x-3=-2⟺ x=5 ή x=1
Επομένως η εξίσωση έχει δύο λύσεις,τους αριθμούς 5 και 1.

ii) |2x-3|=|x-2|⟺ 2x-3=x-2 ή 2x-3=-x+2⟺ 2x-x=3-2 ή 2x+x=3+2⟺ x=1 ή 3x=5⟺ x=1 ή $x=\frac{5}{3}$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο λύσεις τους αριθμούς 1 και $\frac{5}{3}$.

iii) |x-3|=3x-2 (1)

Έχουμε τον εξής περιορισμό: 3x-2≥0⟺ $x\geq\frac{2}{3}$.

(1)⟺x-3=3x-2 ή x-3=-3x+2⟺ $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{5}{4}$

Δεκτή είναι μόνο η $x=\frac{5}{4}$,αφού μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό $x\geq\frac{2}{3}$.

iv) |3x-2|=x-3 (2) Έχουμε τον εξής περιορισμό: x-3≥0⟺x≥3.

(2)⟺3x-2=x-3 ή 3x-2=-x+3⟺ $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{5}{4}$

Δεν είναι καμία δεκτή. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

19. Να λυθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ∈ℝ : $(\lambda^2-4)x=\lambda-2$.

Λύση:

$(\lambda^2-4)x=\lambda-2 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)x=\lambda-2$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
α) Αν (λ-2)(λ+2)≠0 ⟺ λ≠2 και λ≠-2 ,τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την:

$$x=\frac{\lambda-2}{(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{1}{\lambda+2}$$

β) Αν λ=2 ,τότε 0x = 0 , αόριστη
γ) Αν λ=-2 ,τότε 0x = - 4 , αδύνατη

20. Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση: $\frac{x+\lambda}{2}-\frac{\lambda x-1}{3}=1-\frac{\lambda x-3}{6}$

Λύση:

Πολλαπλασιάζουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών, το 6.

$$6\frac{x+\lambda}{2}-6\frac{\lambda x-1}{3}=6-6\frac{\lambda x-3}{6}\Leftrightarrow 3(x+\lambda)-2(\lambda x-1)=6-(\lambda x-3)\Leftrightarrow$$

$$3x+3\lambda-2\lambda x+2=6-\lambda x+3\Leftrightarrow\ 3x-2\lambda x+\lambda x=6+3-2-3\lambda\Leftrightarrow$$

$$(3-2\lambda+\lambda)x=-3\lambda+7\Leftrightarrow(-\lambda+3)x=-3\lambda+7 \qquad (1)$$

Είναι $-\lambda+3=0\Leftrightarrow\lambda=3$.

α. Αν $\lambda\neq 3$ τότε η (1) έχει μοναδική λύση την : $x=\dfrac{-3\lambda+7}{-\lambda+3}$

β. Αν $\lambda=3$ τότε η (1) γίνεται: $0x=-2$, άρα είναι αδύνατη.

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\left|2-|2x-1|\right|=5$ **ii.** $\dfrac{|x-1|-2}{3}-1=\dfrac{|1-x|-5}{2}$

Λύση:

i.

$$\begin{aligned}
\left|2-|2x-1|\right|=5\Leftrightarrow\ & 2-|2x-1|=5 && \text{ή} && 2-|2x-1|=-5\Leftrightarrow\\
& -|2x-1|=3 && \text{ή} && -|2x-1|=-7\Leftrightarrow\\
& |2x-1|=-3 && \text{ή} && |2x-1|=7\Leftrightarrow\\
& \text{αδύνατη} && \text{ή} && |2x-1|=7.\\
|2x-1|=7\Leftrightarrow\ & 2x-1=7 && \text{ή} && 2x-1=-7\Leftrightarrow\\
& 2x=8 && \text{ή} && 2x=-6\Leftrightarrow\\
& x=4 && \text{ή} && x=-3
\end{aligned}$$

ii. Θέτουμε $\omega=|x-1|=|1-x|$ (αφού οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή), και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\omega-2}{3}-1=\frac{\omega-5}{2}\Leftrightarrow 6\frac{\omega-2}{3}-6=6\frac{\omega-5}{2}\Leftrightarrow 2(\omega-2)-6=3(\omega-5)\Leftrightarrow$$

$2\omega-4-6=3\omega-15\Leftrightarrow-\omega=-5\Leftrightarrow\omega=5$. Άρα $|x-1|=5\Leftrightarrow$

$x-1=5$ ή $x-1=-5\Leftrightarrow x=6$ ή $x=-4$.

22. Δίνεται η εξίσωση $2x^2+4x+\lambda=0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ:

α) αυτή έχει δύο λύσεις άνισες

β) αυτή έχει μία διπλή ρίζα

γ) δεν έχει ρίζες

Λύση:

Βρίσκουμε κατ΄αρχήν την διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και είναι:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16 - 8\lambda$.

α) Για να έχει η εξίσωση δύο λύσεις άνισες θα πρέπει $\Delta > 0$. Οπότε,$16-8\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<2$

β) Για να έχει η εξίσωση μία διπλή ρίζα θα πρέπει $\Delta = 0$. Οπότε,$\lambda=2$

γ) Για να μην έχει λύσεις η εξίσωση,θα πρέπει $\Delta < 0$. Οπότε,$\lambda>2$

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$ (1)

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

Λύση:

i) Για να δείξω ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$,αρκεί να δείξω ότι $\Delta\geq 0$.
Έχουμε: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4\lambda^2 + 32 > 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αφού $\lambda^2 \geq 0$.
Επομένως η (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_2=x_1^2$,τότε για το γινόμενο P των ριζών ισχύει:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_1^2 = -8 \Leftrightarrow x_1^3 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Άρα $x_2 = 4$

Από το άθροισμα S των ριζών ισχύει :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -2+4 = -2\lambda \Leftrightarrow \lambda = -1$$

24. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και -3.

Λύση:

Έχουμε: $S=-2-3=-5$ και $P=(-2)(-3)=+6$.
Μία τέτοια εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0$, δηλαδή $x^2+5x+6=0$.

25. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

1. η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

2. το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

Λύση:

1. Ισχύει $\lambda \neq -2 \Leftrightarrow \lambda + 2 \neq 0$ άρα ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου $(\lambda+2)x^2$ της εξίσωσης είναι μη μηδενικός.
Συνεπώς η εξίσωσή μας είναι δευτέρου βαθμού ως προς x και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν για τη διακρίνουσά της Δ ισχύει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\lambda)^2 - 4\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-1) > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\cdot(\lambda^2+\lambda-2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} - 4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -8 \Leftrightarrow \frac{-4\lambda}{-4} < \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow \lambda < 2.$$

Λόγω και του περιορισμού $\lambda+2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$ συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν $\lambda \in (-\infty,-2) \cup (-2,2)$.

2. Εφαρμόζοντας τον τύπο Vieta, $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ για το άθροισμα των ριζών μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού, έχουμε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσής μας είναι ίσο με 2 όταν ισχύει:

$$-\frac{2\lambda}{\lambda+2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2(\lambda+2) \Leftrightarrow -2\lambda = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow -2\lambda - 2\lambda = 4 \Leftrightarrow -4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2 όταν $\lambda = -1$.

25. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \Re$ (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \Re$

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

3. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$.

Λύση:

1. $\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$

Επομένως, αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \Re$.

2. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

3. Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $x_1 = \frac{1+(2\lambda-1)}{2}$, $\quad x_2 = \frac{1-(2\lambda-1)}{2}$.

Επομένως $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = \left|\frac{1+(2\lambda-1)}{2} - \frac{1-(2\lambda-1)}{2}\right| = |2\lambda - 1|$

Άρα για $\lambda \neq \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |2\lambda-1| = \frac{1}{|2\lambda-1|} \Leftrightarrow |2\lambda-1|^2 = 1 \Leftrightarrow |2\lambda-1| = 1 \text{ ή } |2\lambda-1| = -1$$

αδύνατη αφού $|2\lambda-1| \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως $|2\lambda-1|=1 \Leftrightarrow 2\lambda-1=1$ ή $2\lambda-1=-1$. Δηλαδή $\lambda=1$ ή $\lambda=0$.

26. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda$, $\lambda\in \Re-\{0\}$

1. **Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in \Re-\{0\}$.**
2. **Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών.**
3. **Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.**
4. **Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και 1.**

Λύση:

1. Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta=\left[-\left(\lambda^2+1\right)\right]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta=\left(\lambda^2+1\right)^2-4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Delta=\lambda^4-2\lambda^2+1 \Leftrightarrow \Delta=\left(\lambda^2-1\right)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$,

οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

2. $S=x_1+x_2 \Leftrightarrow S=-\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow S=-\dfrac{-\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda} \Leftrightarrow S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και

$P=x_1x_2 \Leftrightarrow P=\dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow P=\dfrac{\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow P=1$

3. Για $\lambda>0$ είναι $P = 1 > 0$ και $S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$, οπότε έχει ρίζες θετικές

4. Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς των αριθμών $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και 1.

Είναι $\dfrac{x_1+x_2}{2}-1=\dfrac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2}-1=\dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda}-1=\dfrac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda}=\dfrac{(\lambda-1)^2}{2\lambda}>0$,

για κάθε $0<\lambda\neq 1$. Επομένως $\dfrac{x_1+x_2}{2}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2}>1$.

<u>4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ</u>

27. Λύστε τις ανισώσεις: i. $\dfrac{|x-2|-1}{2}<1-\dfrac{|x-2|-2}{3}$ ii. $2<|3x-1|<8$

iii. $\left|2-|x-1|\right|<3$ **iv.** $\left|x^2+x+1\right|<x+5$

Λύση:

i. Θέτουμε $\boxed{\omega=|x-2|}$ και η ανίσωση γίνεται:

$$\frac{\omega-1}{2}<1-\frac{\omega-2}{3}\Leftrightarrow 6\frac{\omega-1}{2}<6-6=\frac{\omega-2}{3}\Leftrightarrow 3(\omega-1)<6-2(\omega-2)\Leftrightarrow$$

$$3\omega-3<6-2\omega+4\Leftrightarrow 5\omega<13\Leftrightarrow \omega<\frac{13}{5}\Leftrightarrow |x-2|<\frac{13}{5}\Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{5}<x-2<\frac{13}{5}\Leftrightarrow 2-\frac{13}{5}<x<2+\frac{13}{5}\Leftrightarrow -\frac{3}{5}<x<\frac{23}{5}.$$

ii. Είναι $2<|3x-1|<8\Leftrightarrow\begin{cases}|3x-1|<8\\|3x-1|>2\end{cases}$

$\lvert 3x-1\rvert<8\Leftrightarrow$	και	$\lvert 3x-1\rvert>2$
$-8<3x-1<8\Leftrightarrow$		$3x-1<-2$ ή $3x-1>2$
$-7<3x<9\Leftrightarrow$		$3x<-1$ ή $3x>3$
$-\frac{7}{3}<x<3$		$x<-\frac{1}{3}$ ή $x>1$

Τελικά παίρνουμε : $-\frac{7}{3}<x<-\frac{1}{3}$ ή $1<x<3$.

iii. $\left|2-|x-1|\right|<3\Leftrightarrow -3x<2-|x-1|<3\Leftrightarrow -5<-|x-1|<1\Leftrightarrow$
$5>|x-1|>-1$. Άρα $|x-1|<5\Leftrightarrow -5<x-1<5\Leftrightarrow -4<x<6$

iv. Βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου: $\varphi(x)=x^2+x+1$. Είναι
$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$, άρα $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή
$|x^2+x+1|=x^2+x+1$. Άρα η ανίσωση γίνεται:
$x^2+x+1<x+5\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow |x|<2\Leftrightarrow -2<x<2.$·

28. Να βρείτε τις τιμές του λ∈ℝ για τις οποίες η ανίσωση $x^2+3\lambda x+\lambda>0$ αληθεύει για κάθε x∈ℝ.

Λύση:

Το τριώνυμο $x^2 + 3λx + λ$ έχει $α = 1 > 0$ και $Δ = β^2 - 4αγ = 9λ^2 - 4λ$.

Θέλουμε να είναι $x^2 + 3λx + λ$ θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα πρέπει $Δ < 0 \Leftrightarrow$

$9λ^2 - 4λ < 0 \Leftrightarrow λ(9λ - 4) < 0$

Οι ρίζες είναι: $λ = 0$ ή $λ = \frac{4}{9}$.

λ	$-\infty$ 0 4/9 $+\infty$
$9λ^2$-4λ	+ 0 — 0 +

Άρα, $λ \in (0, \frac{4}{9})$.

29. 1. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$.

2. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

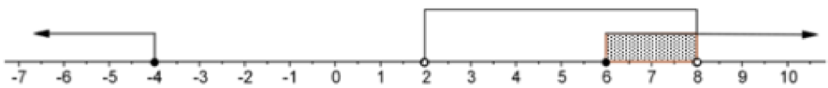
Λύση:

1. Έχουμε: $|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow (x-1 \geq 5 \text{ ή } x-1 \leq -5) \Leftrightarrow x \geq 6 \text{ ή } x \leq -4 \quad (1)$

2. Για τα x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3 ισχύει:

$$d(x,5) < 3 \Leftrightarrow |x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow -3+5 < x < 3+5 \Leftrightarrow 2 < x < 8 \quad (2)$$

3. Από τη συναλήθευση των (1) και (2) έχουμε ότι: $6 \leq x < 8$.



<u>$5^ο$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ</u>

30. Να οριστούν αναδρομικά οι ακολουθίες:

α) $α_ν = -3ν + 4$

β) $β_ν = 2 \cdot 3^ν$

γ) $γ_ν = 2 \cdot 6^{ν+1} - 3$

Λύση:

α) Για ν = 1 έχουμε ότι: $α_1 = -3 + 4 = 1$.

Θεωρούμε τη διαφορά: $α_{ν+1} - α_ν = -3(ν + 1) + 4 + 3ν - 4 = -3ν - 3 + 4 - 3ν - 4 = -3$

Επομένως ο ανδρομικός τύπος είναι: $α_{ν+1} = α_ν - 3$ με $α_1 = 1$

β) Για ν = 1 έχουμε ότι: $β_1 = 6$.

Θεωρούμε το πηλίκο: $\frac{β_{ν+1}}{β_ν} = \frac{2 \cdot 3^{ν+1}}{2 \cdot 3^ν} = 3$

Επομένως ο αναδρομικός τύπος είναι: $β_{ν+1} = 3β_ν$ με $β_1 = 6$.

γ) Για $\nu = 1$ έχουμε ότι: $\gamma_1 = 69$.

Θεωρούμε το πηλίκο : $\frac{\gamma_{\nu+1}+3}{\gamma_\nu+3} = \frac{2\cdot 6^{\nu+1+1}}{2\cdot 6^{\nu+1}} = 6 \Leftrightarrow \gamma_{\nu+1}+3=6\gamma_\nu+18$.

Επομένως ο αναδρομικός τύπος είναι: $\gamma_{\nu+1}=6\gamma_\nu+15$ με $\gamma_1=69$.

31. Να υπολογίσετε το άθροισμα 3+7+11+…+199.

Λύση:

Το άθροισμα αυτό αποτελεί άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=3$,$\omega=4$ και $\alpha_\nu=199$.

Ισχύει $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \Leftrightarrow 199=3+(\nu-1)4 \Leftrightarrow 196=4\nu-4 \Leftrightarrow 4\nu=200 \Leftrightarrow \nu=50$.

Επομένως $S_{50}=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu) = \frac{50}{2}(3+199)=5.050$

32. Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρική προόδου της οποίας ο 3^{ος}όρος είναι 24 και ο 6^{ος} όρος είναι 192.

Λύση:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 24 \\ \alpha_6 = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 24 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 192 \end{cases}$$

Διαιρούμε κατά μέλη και έχουμε: $\frac{\alpha_1\cdot\lambda^5}{\alpha_1\cdot\lambda^2} = \frac{192}{24} \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Επομένως ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda=2$.

33. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

1. Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστήςσειράς.

2. Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

3. Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Λύση:

1. Από την υπόθεση προκύπτει ότι το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 120$ και $\omega=20$

Έτσι ο ν-οστός όρος, δηλαδή τοπλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς, είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 + (\nu-1)20 = 20\nu + 100$$

2. Η τελευταία σειρά είναι η 10^{η} οπότε ο α_{10} εκφράζει το ζητούμενο πλήθος καθισμάτων:

$$\alpha_{10} = 20\cdot 10 + 100 = 200 + 100 = 300$$

3. Το σύνολο των καθισμάτων του γυμναστήριου είναι το άθροισμα του πλήθους των καθισμάτων όλων των σειρών, δηλαδή το S_{10}.

$$S_{10} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{120+300}{2} \cdot 10 = 210 \cdot 10 = 2100$$

34. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με κ>1.

1. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

2. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι α_1 = 2, τότε:

i. Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι ω=7.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

Λύση:

1. Γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω μιας αριθμητικής προόδου δίνεται από τη σχέση $\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$.

Οπότε έχουμε $\omega = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow \omega = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 \Leftrightarrow \omega = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 \Leftrightarrow \omega = 2\kappa + 1$, άρα ο ω είναι περιττός αριθμός.

2. i. Είναι ω=2κ+1 (1) και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = \kappa^2 - 2$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) με $\kappa > 1$ έχουμε $\kappa^2 - 2 = 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$.

Το τριώνυμο (1) έχει:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \Leftrightarrow \Delta = 4 + 12 \Leftrightarrow \Delta = 16 > 0$$

Άρα έχει δύο ρίζες άνισες, τις $\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \kappa_1 = 3 \\ \kappa_2 = -1 \end{cases}$

Η τιμή $\kappa_1 = 3$ είναι δεκτή, αφού $3 > 1$, ενώ η τιμή $\kappa_2 = -1$, απορρίπτεται αφού $-1 < 1$.

Για κ=3 είναι $\omega = 2 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow \omega = 7$.

ii. Για να βρούμε αν υπάρχει όρος της προόδου που είναι ίσος με 1017, αρκεί να εξετάσουμε αν υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\alpha_\nu = 1017$.

Οπότε για $\kappa = 3$ και $\omega = 7$ έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow 1017 = 2 + 7(\nu-1) \Leftrightarrow 7(\nu-1) = 1015 \Leftrightarrow \nu - 1 = 145 \Leftrightarrow \nu = 146.$$

Άρα υπάρχει όρος που είναι ίσος με 1017 και είναι ο α_{146}.

35. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

α_3=4, α_5 = 16 και λ> 0

1. Να βρεθούν ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της προόδου.

2. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

Αν S_{10} , S'_{10} είναι τα αθροίσματα των δέκα πρώτων όρων των ακολουθιών (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

Λύση:

1. Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ παίρνουμε: $\alpha_3 = \alpha_1\lambda^2 = 4$ (1) και $\alpha_5 = \alpha_1\lambda^4 = 16$ (2)

Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) : (1) λαμβάνουμε $\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4$ και

επειδή λ>0 θα είναι λ=2.

Με αντικατάσταση σε κάποια από τις σχέσεις παίρνουμε $\alpha_1 = 1$.

2. Ας πάρουμε δύο οποιουσδήποτε διαδοχικούς όρους της ακολουθίας, έστω β_ν , $\beta_{\nu+1}$.

Έχουμε $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{\alpha_\nu}{\lambda\cdot\alpha_\nu} = \frac{1}{\lambda}$.

Άρα η ακολουθία β_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda' = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ και $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{1} = 1$

3. Από τον τύπο $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ παίρνουμε: $S_{10} = \alpha_1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1023$.Άρα $\frac{S_{10}}{2^9} = \frac{1023}{2^9}$.

Τώρα $S'_{10} = \beta_1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{1024} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1023}{1024} = \frac{1023}{512} = \frac{1023}{2^9}$ όπως θέλαμε.

36. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 **καθίσματα.**

1. Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά αυτής της προόδου.

2. Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

3. Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

4. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μο

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

Λύση:

1. Ο αριθμός των καθισμάτων κάθε σειράς είναι αυξημένος από τον αριθμό καθισμάτων της προηγούμενης κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων, συνεπώς οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής

προόδου. Η πρώτη σειρά έχει 16 καθίσματα άρα $\alpha_1 = 16$, ενώ η έβδομη σειρά έχει 28 καθίσματα άρα $\alpha_7 = 28 \Rightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Rightarrow 16 + 6\omega = 28 \Rightarrow 6\omega = 28 - 16 = 12 \Rightarrow \omega = 2$.
Άρα η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 16$ και διαφορά $\omega = 2$.

2. Ο γενικός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \underset{\omega=2}{\overset{\alpha_1=16}{\Rightarrow}} \alpha_\nu = 16 + (\nu - 1) \cdot 2 \Rightarrow$ $\alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Rightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14$.

3. Το σύνολο των καθισμάτων όλου του θεάτρου (που έχει συνολικά 20 σειρές καθισμάτων) είναι ίσο με: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{20} = S_{20}$, οπότε εφαρμόζοντας τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot \left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$ βρίσκουμε:

$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2 \cdot 16 + (20 - 1) \cdot 2\right] = 10 \cdot (32 + 19 \cdot 2) = 10 \cdot (32 + 38) = 10 \cdot 70 = 700$, δηλαδή το θέατρο έχει συνολικά 700 καθίσματα.

i. Η πρώτη σειρά θα έχει $16 - 6 = 10$ κατειλημμένα καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά θα έχει μεν δύο παραπάνω καθίσματα αλλά ταυτόχρονα και 3 περισσότερα ελεύθερα από την προηγούμενη, άρα θα έχει 1 κατειλημμένο κάθισμα λιγότερο. Συνεπώς ο αριθμός των κατειλημμένων καθισμάτων κάθε σειράς θα ακολουθεί αριθμητική πρόοδο (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = 10$ και διαφορά $\omega = -1$ (άρα και φθίνοντες όρους) μέχρι φυσικά να μηδενιστούν τα κατειλημμένα καθίσματα, οπότε σε κάθε σειρά από αυτήν και πέρα θα έχουμε μόνο άδεια καθίσματα. Ισχύει $\beta_\nu > 0 \Rightarrow$ $\beta_1 + (\nu - 1)\omega > 0 \Rightarrow 10 + (\nu - 1) \cdot (-1) > 0 \Rightarrow 10 - \nu + 1 > 0 \Rightarrow \nu < 11$.

Άρα κατειλημμένα καθίσματα έχουν οι πρώτες 10 σειρές, οπότε από την ενδέκατη και πάνω οι σειρές είναι άδειες.

ii. Το πλήθος των θεατών ισούται προφανώς με το πλήθος των κατειλημμένων καθισμάτων που είναι ίσο με το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της αριθμητικής προόδου (β_ν), δηλαδή:

$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot 10 + (10 - 1) \cdot (-1)\right] = 5 \cdot (20 - 9 \cdot 1) = 55$ Άρα έχουμε 55 θεατές.

<u>6^ο -7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ</u>

37.

Δίνεται η συνάρτηση: $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x^3 - 16}{\sqrt{6 - 2|x - 1|} + 1}}$

i. Βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Δείξτε ότι: $\mathbf{\dfrac{f(3) + f(-1)}{20} = \sqrt{2} - 1}$

iii. Βρείτε τα σημεία Α, Β στα οποία η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, καθώς και την απόσταση (ΑΒ).

iv. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζουν τα σημεία Α, Β.

Λύση:

i. Λύνουμε την ανισότητα: $6-2|x-1|>0$

$-2|x-1|>-6$

$|x-1|<3$

$-3<x-1<3$

$-2<x<4$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το (–2,4)

ii. Ισχύουν: $f(3)=\dfrac{2\cdot 3^3-16}{\sqrt{6-4}+1}=\dfrac{38}{\sqrt{2}+1}$ και

$$f(-1)=\frac{2\cdot(-1)^3-16}{\sqrt{6-4}+1}=\frac{-18}{\sqrt{2}+1}$$

Οπότε: $f(3)+f(-1)=\dfrac{20}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{20\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=20\left(\sqrt{2}-1\right)$

Άρα: $\dfrac{f(3)+f(-1)}{20}=\dfrac{20\left(\sqrt{2}-1\right)}{20}=\sqrt{2}-1$

iii. ***Για τον άξονα y΄y:***

Βρίσκουμε το $f(0)=\dfrac{-16}{\sqrt{4}+1}=-\dfrac{16}{3}$, άρα η C_f τέμνει τον y΄y στο $B\left(0,-\dfrac{16}{3}\right)$.

Για τον άξονα x΄x:

Λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=0\Leftrightarrow 2x^3-16=0\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$

Άρα η C_f τέμνει τον x΄x στο A(2,0).

Οπότε: $(AB)=\sqrt{(2-0)^2+\left(0-\dfrac{-16}{3}\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{256}{9}}=\dfrac{\sqrt{292}}{3}$

iv. Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζουν τα Α,Β τότε:

- $B\left(0,-\dfrac{16}{3}\right)(\varepsilon)\Leftrightarrow -\dfrac{16}{3}=\beta$,
- $A(2,0)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow 0=2\alpha+\beta\Leftrightarrow 2\alpha=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{8}{3}$

38.

Δίνεται η συνάρτηση f με: $y=f(x)=\begin{cases}\alpha x+32, & \text{αν } x<-2\\ \beta x^2, & \text{αν } -2\le x\le 2\\ \dfrac{\gamma}{x}, & \text{αν } x>2\end{cases}$

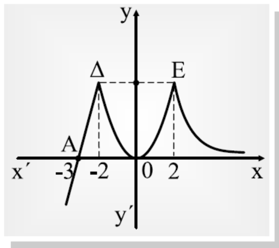
Αν τα σημεία Α(–3,0), Β(1,1) και Γ(4,2) ανήκουν στην γραφική παράσταση της f βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και μετά παραστήστε την γραφικά.

Λύση:

• Το $A(-3,0) \in C_f \Leftrightarrow f(-3)=0 \Leftrightarrow -3\alpha+12=0 \Leftrightarrow \alpha=4$

Το $B(1,1) \in C_f \Leftrightarrow f(1)=1 \Leftrightarrow \beta=1$

Το $\Gamma(4,2) \in C_f \Leftrightarrow f(4)=2 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{4}=2 \Leftrightarrow \gamma=8$



Άρα $f(x)=\begin{cases} 4x+12, \text{ αν } & x<-2 \\ x^2, \text{ αν } & -2 \le x \le 2 \\ \frac{8}{x}, \text{ αν } & x>2 \end{cases}$

• Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από:

(I) την ημιευθεία με εξίσωση $\boxed{y=4x+12, \text{ με } \ x<-2}$ στην οποία δεν ανήκει η αρχή της $\Delta(-2,4)$ ενώ περνάει από το σημείο $A(-3,0)$

(II) το τόξο της παραβολής με εξίσωση $\boxed{y=x^2 \quad \text{αν} \quad -2 \le x \le 2}$ που έχει άκρα τα σημεία $\Delta(-2,4)$ και $E(2,4)$.

(III) το τόξο της υπερβολής με εξίσωση $\boxed{y=\frac{8}{x}, \text{ με } \ x>2}$ που έχει άκρο το σημείο Ε(2,4) το οποίο βέβαια δεν ανήκει στο τόξο.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-8$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παραστάσης με τους άξονες

γ Να βρείτε το διάστημα που η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται :

i) πάνω από τον άξονα x΄x

ii) κάτω από τον άξονα x΄x

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f : $\mathbb{A}_f=\mathbb{R}$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x όταν y=0.

Έχουμε $0=2x^2-8 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.Άρα, τα σημεία τομής με τον άξονα x΄x είναι τα (-2,0) και (2,0).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα y΄y όταν x=0.

Έχουμε $y=2\cdot 0^2-8 \Leftrightarrow y=-8$.Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα y΄y είναι το (0,-8)

γ) i) Όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x,τότε η f(x)>0.

Άρα,έχουμε : $f(x)>0 \Leftrightarrow 2x^2-8>0 \Leftrightarrow 2(x^2-4)>0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$.

ii) Όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x,τότε η f(x)<0.

Άρα,έχουμε : $f(x)<0 \Leftrightarrow 2x^2-8<0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+2)<0 \Leftrightarrow x \in (-2,2)$.

40. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία :

i) Έχει κλίση α=-2 και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0,4)

ii) Σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω=45^o και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0,2).

iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία y=2x+1 και διέρχεται από το σημείο Γ(-1,-3)

Λύση :

i) Η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής y=αx+β.
Επειδή α=-2 και από την τεταγμένη του σημείου Β παίρνουμε το β=4.
Οπότε η εξίσωση της ευθείας γίνεται :y=-2x+4

ii) Η εξίσωση της ευθείας είναι πάλι της μορφής y=αx+β.
Επειδή α=εφ45^o=1 και από το σημείο Β(0,2) έχουμε ότι β=2.
Οπότε η εξίσωση της ευθείας γίνεται :y=x+2.

iii) Η εξίσωση είναι της μορφής y=αx+β.
Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη με την y=2x+1 θα έχει ίδια κλίση με αυτή,οπότε θα είναι α=2.
Άρα,η εξίσωση γίνεται :y=2x+β.
Όμως η ευθεία διέρχεται από το σημείο Γ(-1,-3),οπότε έχουμε:
-3=2·(-1)+β⇔β=-1.Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι : y=2x-1.

41. Δίνεται η συνάρτηση f **, με:** $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\le 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

1. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f **σε μορφή διαστήματος.**

2. Να υπολογίσετε τις τιμές f(-1), f(3) και f(5).

3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=25$**.**

Λύση:

1. Το πεδίο ορισμού ισούται με την ένωση των διαστημάτων που ορίζουν οι κλάδοι της συνάρτησης, έτσι έχουμε: $\left(-\infty,3\right]\cup\left(3,10\right)=\left(-\infty,10\right)$. Άρα $A=\left(-\infty,10\right)$.

2. Με κατάλληλη επιλογή κάθε κλάδου:

$$f\left(-1\right)=2\left(-1\right)-5=-2-5=-7$$

$$f\left(3\right)=2\cdot 3-5=6-5=1$$

$$f\left(5\right)=5^2=25$$

3. $$f(x)=25\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-5=25, x\le 3 \\ x^2=25, 3<x<10 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=15, x\le 3 \\ x=5 \text{ ή } x=-5, 3<x<10 \end{cases}\Leftrightarrow x=5$$

42. Δίνεται η συνάρτηση f **, με** $f(x)=\begin{cases} -x+2, \text{ αν } x<0 \\ x+2, \text{ αν } x\ge 0 \end{cases}$**.**

1. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f **με τον άξονα** $y'y$ **.**

2. i. Να χαράξετε τη C_f **και την ευθεία** $y=3$**, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.**

ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. i. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (3i), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (2ii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

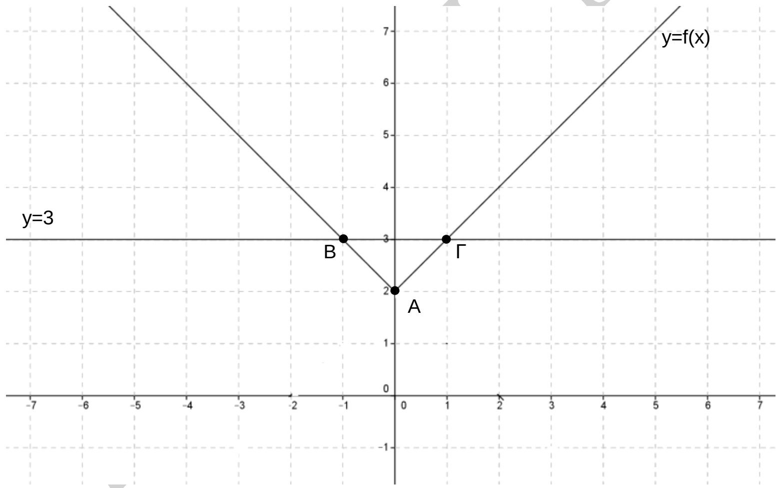
Λύση:

1. Έχουμε ότι: $f(0)=0+2=2$, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,2)$

2. i. Για $x<0$ έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημιευθεία AB χωρίς την αρχή της A, όπου $A(0,2)$ και $B(-1,3)$.

Για $x\geq 0$ έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η ημιευθεία $A\Gamma$ με $\Gamma(1,3)$.

Η ευθεία με εξίσωση $y=3$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία B,Γ.



Τα σημεία τομής τους είναι τα B(-1,3) και Γ(1,3).

ii. Τα σημεία B και Γ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$, αφού έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες.

3. i. Η ευθεία με εξίσωση $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία για κάθε $\alpha>2$.

ii. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι είναι $f(x)=y\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η ευθεία με εξίσωση $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία για κάθε $\alpha>2$ αφού για $\alpha=2$ την τέμνει σε ένα, ενώ για $\alpha<2$ δεν την τέμνει σε κανένα σημείο.

Επειδή ισχύει $|x|=\begin{cases}-x\ ,\ \text{αν } x<0\\ x\ ,\ \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ έχουμε ότι: $f(x)=|x|+2$.

Αναζητούμε τα $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ να έχει δύο λύσεις.

Συνεπώς: $f(x)=\alpha \Leftrightarrow |x|+2=\alpha \Leftrightarrow |x|=\alpha-2$ **(Ι)**. Επειδή $|x|\geq 0$, έχουμε ότι:

- Αν $\alpha-2<0 \Leftrightarrow \alpha<2$, η εξίσωση (Ι) είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$, η εξίσωση (Ι) έχει μοναδική λύση $x=0$.
- Αν $\alpha-2>0 \Leftrightarrow \alpha>2$, η εξίσωση (Ι) έχει δύο λύσεις, τις $x=\alpha-2$ ή $x=-(\alpha-2)=-\alpha+2$.

43. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και 9(x) = 3x - 4, $x\in\mathbb{R}$.

1. **Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.**
2. **Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.**
3. **Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.**

Λύση:

1. Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού $A_f=A_g=\mathbb{R}$.

Για $x\in\Re$, έχουμε: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x=3x-4\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$, αφού το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot 4=9>0$ και ρίζες

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases} x_1=4 \\ \text{ή} \\ x_2=1 \end{cases}.$$

Συνεπώς τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα $A(1,f(1))=(1,-1)$ και $B(4,f(4))=(4,8)$, αφού $f(1)=g(1)=-1$ και $f(4)=g(4)=8$.

2. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g λύνουμε την ανίσωση $f(x)<g(x)$, $x\in\Re$, έχουμε:

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-5x+4<0$$

Επομένως $x\in(1,4)$ αφού,

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Για να βρίσκεται κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, κάτω από τη γραφική παράσταση της f αρκεί να ισχύει $f(x)>\alpha$ για κάθε $\alpha<-1$.

Επομένως:

$x^2-2x>\alpha\Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0$, η οποία ισχύει αφού το τριώνυμο $x^2-2x-\alpha$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4(-\alpha)=4+4\alpha=4(1+\alpha)<0$ για κάθε $\alpha<-1\Leftrightarrow\alpha+1<0$

Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.