Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

(1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. **(α)** Να διατυπώσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε το θεώρημα των Ενδιάμεσων τιμών για μια συνεχή συνάρτηση F στο διάστημα [α, β]. (Μονάδες 5)

(β) Πότε μια συνάρτηση F ορισμένη σ΄ένα σύνολο Α ονομάζεται γνησίως αύξουσα και πότε λέγεται ‘’1-1’’; (Μονάδες 3)

(γ) Πότε μια συνάρτηση F λέμε ότι είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right)$; (Μονάδες 3)

Α2. Να εξετάσετε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων, σημειώνοντας (Σ)ωστή ή (Λ)ανθασμένη.. (Μονάδες 10)

(1) Οι συναρτήσεις $F(x)=x\cdot\ln x^2$, $g(x)=2\cdot x\cdot\ln x$ είναι ίσες.

(2) Η συνάρτηση $y=-\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(3) Η συνάρτηση $y=x^4$ $x\in\mathbb{R}$ δεν αντιστρέφεται.

(4) Η γραφική παράσταση της $h(x)=x^2-1-3\cdot\ln(x-1)$ διέρχεται από το σημείο $K(1,0)$.

(5) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ’ ένα σύνολο Α και δεν μηδενίζεται σ΄αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Α.

(6) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι ‘’1-1’’, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

(7) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας ‘’1-1’’ συνάρτησης το πολύ σ΄ένα σημείο.

(8) Αν μια συνάρτηση F είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα Δ, τότε αντιστρέφεται και η αντίστροφή της F^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $F(\Delta)$.

(9) Η εικόνα $\mathbf{f}(\boldsymbol{\Delta})$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, είναι ένα διάστημα.

(10) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει ακρότατα.

Α3. Να αντιστοιχίσετε τα όρια της 1ης στήλης με τις αντίστοιχες τιμές τους στην 2η στήλη.

1η στήλη (όρια)		*2η στήλη (τιμές ορίων)*	
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$	**1**	**α**	0
$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$	**2**		
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2015}{x}$	**3**	**β**	1
$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x$	**4**		
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2015}{x^2}$	**5**	**γ**	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$	**6**		
$\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x}$	**7**	**δ**	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x}$	**8**		

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{αν} \quad -2\le x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{αν} \quad 1<x<3 \\ e^{x-3}-e^2 & \text{αν} \quad 3<x\le 5 \end{cases}.$$

(α) Να εξετάσετε την f ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 7)

(β) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της όταν $x\in(3,5]$. (Μονάδες 8)

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

Β2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $h(x)=x^3+\ln x-e$ για κάθε $x>0$ με:

- Η g είναι γνησίως αύξουσα.
- $(g\circ f)(x)=h(x)$ για κάθε $x>0$

(α) Δείξτε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (5 μονάδες)

(β) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 4}\Phi(x)$ όταν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\Phi(2x)-5}{2x^2-7x}=-\infty$. (10 μονάδες)

Γ2. Να υπολογίζετε το $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x-\alpha}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής με $x\cdot f(x)+3\eta\mu x=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να βρεθεί ο τύπος της f. (Μονάδες 10)

Δ2. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (Μονάδες 5)

Δ3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα. (Μονάδες 10)

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Δέσποινα Σωτηροπούλου