

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. (α) Σχολικό σελ 194
(β) Σχολικό σελ 149, 151
(γ) Σχολικό σελ 191
- A2. Λάθος, Λάθος, Σωστή, Λάθος, Λάθος, Σωστή, Σωστή, Λάθος, Σωστή, Λάθος.
- A3. 1γ, 2α, 3α, 4δ, 5δ, 6β, 7δ, 8α

ΘΕΜΑ Β

- B1. (α) Προκύπτει εύκολα ότι είναι συνεχής στο $[-2,1) \cup (1,3) \cup (3,5]$ και ασυνεχής στο $x_0 = 1$.
- (β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (αποδεικνύεται με ορισμό) στο $(3,5]$. Έτσι το σύνολο τιμών είναι

$$f((3,5]) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), f(5) \right] = (1 - e^2, 0]$$

- B2. (α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2$$

$$x_1^3 < x_2^3 \quad \text{και} \quad \ln x_1 < \ln x_2$$

$$x_1^3 + \ln x_1 < x_2^3 + \ln x_2$$

$$x_1^3 + \ln x_1 - e < x_2^3 + \ln x_2 - e$$

$$h(x_1) < h(x_2)$$

Έτσι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

- (β) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

$$x_1 < x_2$$

$$h(x_1) < h(x_2) \quad (h \text{ γνησίως αύξουσα})$$

$$(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (g \text{ γνησίως αύξουσα})$$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \frac{\Phi(2x) - 5}{2x^2 - 7x}$ με x κοντά στο 2.

Θα είναι $\Phi(2x) = (2x^2 - 7x)g(x) + 5$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$.

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \Phi(x) &= \lim_{\omega \rightarrow 2} \Phi(2\omega) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 2} [(2\omega^2 - 7\omega)g(\omega) + 5] = \\ &= (8 - 14)(-\infty) + 5 = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Γ2. Το όριο έχει νόημα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Για $\alpha \neq 7$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 8x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 7} (x - \alpha)} = \frac{0}{7 - \alpha} = 0$$

- Για $\alpha = 7$ είναι

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - 7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x-1)}{x-7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} (x-1) = 6\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x \neq 0$ είναι

$$x \cdot f(x) + 3\eta\mu x = x^2$$

$$x \cdot f(x) = x^2 - 3\eta\mu x$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x}$$

Στο $x_0 = 0$ επειδή η f είναι συνεχής θα έχουμε

$$\begin{aligned}f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 3 \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \\ &= 0 - 3 \cdot 1 = -3\end{aligned}$$

$$\text{Άρα είναι } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x} & x \neq 0 \\ -3 & x = 0 \end{cases}$$

Δ2. Για $x > 0$ είναι

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ εφαρμόζοντας κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Τελικά το ζητούμενο όριο θα είναι:

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 \frac{\eta \mu x}{x} \right) = \\ &= +\infty - 3 \cdot 0 = \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{-x}$ $x \in [0, +\infty)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^{-x}) = +\infty - 0 = +\infty$ θα υπάρχει $\mu > 0$ ώστε $g(\mu) > 0$.

- Η g είναι συνεχής στο $[0, \mu]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και της εκθετικής $y = e^{-x}$.
- $\left\{ \begin{array}{l} g(0) = f(0) - e^0 = -3 - 1 = -4 \\ g(\mu) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(\mu) < 0$

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \mu)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Έτσι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα x_0 .

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
 Δέσποινα Σωτηροπούλου