

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολ. Σελ. 133

A2. Σχολ. Σελ. 162

A3. Σχολ. Σελ. 23

A4. 1. Λ 2. Λ 3. Λ 4. Λ 5. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Πρέπει $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$. Επομένως $D_f = [\ln 2, +\infty)$

Και $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. $D_g = \mathbb{R}^*$

B2 . η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με : $f'(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 2}} > 0$, $x > \ln 2$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f

Έτσι το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[f(\ln 2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$

$f(\ln 2) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = +\infty$, δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[3, +\infty)$

η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in D_f$

B3 . για κάθε $y \in [3, +\infty)$ έχουμε διαδοχικά

$$f(x) = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \ln\left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2\right] \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\left[\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 2\right] , x \in [3, +\infty)$$

B.4 $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \dots = \mathbb{R}^*$

$$(f \circ g)(x) = 4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2}+3}} - 2 + 3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $Df = \mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με : $f'(x) = -e^{-x}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο $(b, f(b))$ είναι $y - f(b) = f'(b)(x - b)$

Εφόσον διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα ισχύει

$$0 - e^{-b} = -e^{-b}(0 - b) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow b = -1$$

$$f(-1) = e, f'(-1) = -e$$

$$(\varepsilon) y = -ex$$

Γ2. $f''(x) = e^{-x} > 0$ άρα η f είναι κυρτή και επομένως η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη εκτός από το σημείο επαφής.

$$E(\Omega) = \int_{-1}^0 (e^{-x} + ex) dx + \int_0^a e^{-x} dx = \dots = (e/2 - e^{-a}) \text{ τ.μ.}$$

$$\mathbf{\Gamma 3.} \lim_{a \rightarrow +\infty} E(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{2} - e^{-a} \right) = \dots = e/2$$

$$\mathbf{\Gamma 4.} a'(t) = -3, a(t_0) = 1$$

$$E'(t) = (e/2 - e^{-a(t)})' = e^{-a(t)} a'(t) \Rightarrow E'(t_0) = e^{-a(t_0)} a'(t_0) = -3e^{-1} \mu/s$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλ., $f'(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ ή $f'(x) < 0, x \in \mathbb{R}$

Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Από (I) για } x=1 \text{ έχουμε } f(1) + f(2-1) = 0 \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Άρα ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x=1$, η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

Δ2. Εφαρμόζοντας ΘΜΤ στην f στο $[0,2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\rho \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ (II)

Για $x=0$ η (I) γίνεται $f(0)+f(2)=0 \Leftrightarrow f(2)=-f(0)$

Οπότε η (II) γίνεται $f'(\rho) = \frac{f(2)+f(2)}{2} = f(2)$

Δ3. $g(a) = \frac{f(a)}{f'(a)} = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0 = f(1) \Leftrightarrow a = 1$ (αφού είναι 1-1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(1)}{f'(1)}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right] = \frac{1}{f'(1)} f'(1) = 1$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(1)}$ (f' συνεχής)

Επομένως $g'(1) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$.

Δ4. (a) Έχουμε ότι $(I) \rightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 0$

$$I_1 = \int_0^2 f(x)dx$$

$$I_2 = \int_0^2 f(2-x)dx$$

$$2-x=u \Leftrightarrow x=2-u$$

$$dx = -du$$

$$x=0 \Leftrightarrow u=2$$

$$x=2 \Leftrightarrow u=0$$

$$I_2 = \int_0^2 f(2-x)dx = - \int_2^0 f(u)du = \int_0^2 f(u)du = I_1$$

$$I_1 + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 0.$$

(b) είναι $\int_0^2 f'(x)dx = f(2)-f(0) = 2$

Για $x=0$ η (I) γίνεται $f(0)+f(2)=0$

Οπότε $f(2)=1$, $f(0)=-1$

$$E(\Omega) = \int_{-1}^1 |f^{-1}(x)|dx$$

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$$

$$dx = f'(u)du$$

$$x=-1 \Leftrightarrow f(u)=-1=f(0) \Leftrightarrow u=0$$

$$x=1 \Leftrightarrow f(u)=1=f(2) \Leftrightarrow u=2$$

$$E(\Omega)=\int_{-1}^1 |f^{-1}(x)| dx = \int_0^2 u f'(u) du = [u f(u)]_0^2 - \int_0^2 f(u) du = 2f(2) - 0 = 2 \text{ τ.μ.}$$

* $f'(p)=f(2)=1>0$ και η f' διατηρεί πρόσημο, άρα $f'(x)>0$ *