

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ
ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια "1-1" συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

γ) Για κάθε ζεύγος f, g συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx .$$

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ε) Οι γραφικές παραστάσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = x^2 - 8x + 16 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2$$

B1. Να προσδιορίσετε τη σύνθετη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

Αν $h(x) = x^4 - 8x^2 + 16$, $x \in \mathbb{R}$:

B2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$.

Μονάδες 6

B3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 h(x) dx.$$

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{(x-2)^2}.$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 6

Γ3. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

Μονάδες 6

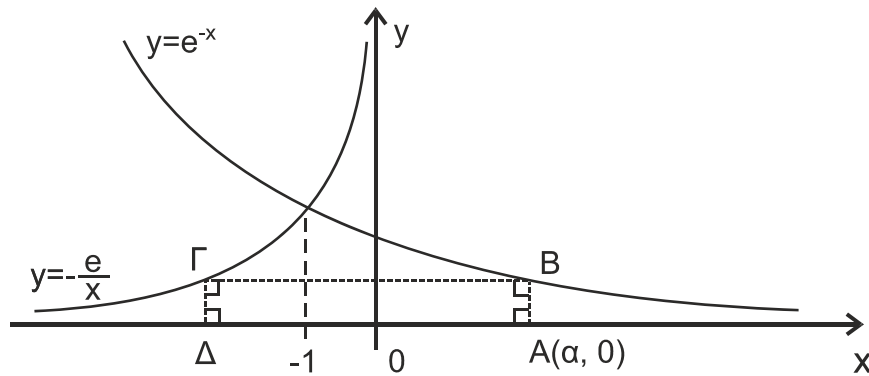
Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{και} \quad g(x) = -\frac{e}{x}.$$



Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις C_f και C_g , αντίστοιχα.

Έστω $A(\alpha, 0)$ με $\alpha > -1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $(-e^{1+\alpha}, e^{-\alpha})$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται, ως συνάρτηση του α , από τον τύπο

$$E(\alpha) = e + \alpha \cdot e^{-\alpha}$$

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε τη θέση του σημείου Α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ