ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στην σελίδα 186 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεώρημα στην σελίδα 142 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Ορισμός στην σελίδα 161 του σχολικού βιβλίου.

Α4. α)Σωστό β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1 : Για το πεδίο ορισμού της fog πρέπει :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \to D_{fog} = [0,1]$$

Με τύπο :

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = \big(\sqrt{x}\big)^4 - 2\big(\sqrt{x}\big)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 \; = (x-1)^2$$

Β2 : $h'(x) = 2(x-1) \cdot (x-1)' = 2(x-1) < 0$ στο [0,1] άρα h γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της h άρα h 1-1 ως γνησίως μονότονη συνάρτηση.

Για τον τύπο της h^{-1} θέτω :

$$y = h(x) \to y = (x-1)^2 \to \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \to$$

$$\sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{x \in [0,1]} \sqrt{y} = -(x-1) \to x = 1 - \sqrt{y}$$

Και επίσης το σύνολο τιμών της h είναι :

$$h([0,1]) \overset{h\searrow}{\to} [h(1), h(0)] = [0,1]$$

Το σύνολο τιμών της h είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της άρα :

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, \qquad D_{h^{-1}} = [0,1]$$

Β3 :

i)

- Η φ είναι συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών και στο 1 διότι :

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

Άρα $\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\varphi(1)=\frac{1}{2}$

- $\varphi(0)=1, \varphi(1)=\frac{1}{2}\to\varphi(0)\neq\varphi(1)$

Άρα , από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των φ(0) και φ(1) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ ώστε $\varphi(x_0)=\xi$

ii) Δίνεται ότι $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα το α ανήκει στο 1^o τεταρτημόριο όπου εκεί το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε :

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\to\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\to\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\ \to\eta\mu\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$$

Άρα, από το προηγούμενο ερώτημα, για κάθε αριθμό ημα μεταξύ των f(0)=1 και f(1)=1/2 υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=\eta\mu\alpha$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

ι) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x)=1-\frac{3}{3x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1$

και $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'		0	−	0	+
f			↘	↗

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x\in(0,1]$ και γνησίως αύξουσα για $x\in[1,+\infty)$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1-\ln 3$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-\ln(3x)\right)=+\infty$$

και $f(1)=1-\ln 3$

Επειδή $e<3 \Leftrightarrow \ln e<\ln 3 \Leftrightarrow 1<\ln 3 \Leftrightarrow 1-\ln 3<0 \Leftrightarrow f(1)<0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, επομένως

$\Delta_1=f\left((0,1]\right)=[1-\ln 3,+\infty)$ και $0\in[1-\ln 3,+\infty)$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, επομένως και «1-1», άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Ακόμη

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1-\ln 3$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(3x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right)=+\infty$$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{3x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, επομένως

$\Delta_2=f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(1-\ln 3,+\infty)$ και $0\in(1-\ln 3,+\infty)$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$, άρα και «1-1», άρα το x_2 είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1 \in (0,1]$ και $x_2 \in (1,+\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$

ιι) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Δ2 Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $\mathrm{E} = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx$

Παρατηρούμε από τον πίνακα μονοτονίας της f ότι για $x \in [x_1, x_2]$ η f δε μηδενίζεται (από ερώτημα Δ1α) και είναι συνεχής. Επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $x_1 < 1 < x_2$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό γράφεται

$$\mathrm{E} = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{x_2}^{x_1} \left(x - \ln(3x)\right) dx = \int_{x_2}^{x_1} x\,dx - \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x)\,dx = I$$

Εδώ έχουμε

$$\int_{x_2}^{x_1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_2}^{x_1} = \frac{x_1^{\,2}}{2} - \frac{x_2^{\,2}}{2} = \frac{x_1^{\,2} - x_2^{\,2}}{2} \text{ και}$$

και

$$\int_{x_2}^{x_1} \ln(3x)\,dx = \int_{x_2}^{x_1} (x)' \cdot \ln(3x)\,dx =$$
$$= \left[x \cdot \ln(3x) \right]_{x_2}^{x_1} - \cdot \int_{x_2}^{x_1} 3x \cdot \ln(3x)'\,dx =$$
$$= \left[x_1 \cdot \ln(3x_1) - 3x_2 \cdot \ln(3x_2) \right] - \int_{x_2}^{x_1} 1dx =$$
$$= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - \int_{x_2}^{x_1} 1\,dx =$$
$$= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - [x]_{x_2}^{x_1} =$$
$$= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 - x_2$$

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$ και

$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{x_2}^{x_1} \ln(3x)\,dx = x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 - x_2 =$$
$$= x_1 \cdot x_1 - x_2 \cdot x_2 - x_1 - x_2 =$$
$$= x_1^{\,2} - x_2^{\,2} - (x_1 - x_2)$$

Επομένως

$$\mathrm{I} = \int_{x_2}^{x_1} x\,dx - \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right) - \left[x_1^{\,2} - x_2^{\,2} - (x_1 - x_2) \right] =$$
$$= \frac{x_1^{\,2}}{2} - \frac{x_2^{\,2}}{2} + x_2^{\,2} - x_1^{\,2} + x_1 - x_2 =$$
$$= \frac{x_2^{\,2}}{2} - \frac{x_1^{\,2}}{2} - (x_2 - x_1) =$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)}{2} - \frac{2(x_2 - x_1)}{2} =$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1 - 2)}{2}$$

Δ3

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\mathrm{E}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1-2\right)>0$

Όμως είναι $x_2>x_1 \Leftrightarrow x_2-x_1>0$

Επομένως

$x_1+x_2-2>0 \Leftrightarrow -x_1-x_2+2<0 \Leftrightarrow 2-x_1<x_2$

Επειδή $x_1<1 \Leftrightarrow -x_1>-1 \Leftrightarrow 2-x_1>1$ είναι $2-x_1 \in (1,+\infty)$ και $x_2 \in (0,+\infty)$

Σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως

$2-x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(2-x_1\right)<f\left(x_2\right) \Leftrightarrow f\left(2-x_1\right)<0$

Δ4

Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο x_2 είναι

$$\varepsilon : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία. ‘

Αρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$

Παρατηρούμε ακόμη ότι $f(1) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3 - 1 = -f(1)$

Με αυτά υπόψιν, η ζητούμενη σχέση γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned}
&2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \\
&2f(x) + \ln 3 - 1 - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow \\
&2f(x) + f(1) - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow \\
&\big(f(x) - f(1)\big) + \big(f(x) - f'(x_2)(x - x_2)\big) = 0
\end{aligned}$$

Είδαμε ότι η f έχει στο $x = 1$ ολικό ελάχιστο, επομένως

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

Τα καλύτερα Φροντιστήρια της πόλης

Επιμέλεια:

ΚΑΛΑΪΤΖΙΔΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ, ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΤΣΑΝΤΙΛΑΣ ΣΩΤΗΡΗΣ, ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, ΒΑΝΟΥΣΗΣ ΧΡΙΣΤΟΣ, ΓΕΩΡΓΟΥΣΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ ΘΕΜΗΣ, ΠΡΩΙΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ, ΠΕΤΡΑ ΖΩΗ, ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗ ΝΙΚΗ, ΧΑΪΔΕΜΕΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ, ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΜΠΛΑΤΣΙΩΤΗ ΝΙΚΗ, ΓΙΑΝΝΑΚΑ ΧΡΙΣΤΙΝΑ, ΝΤΟΥΚΑΣ ΣΤΑΥΡΟΣ, ΦΡΑΝΤΖΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΦΡΑΓΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΓΚΟΛΕΜΗ ΖΑΧΑΡΕΝΙΑ, ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιά, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Μοσχάτο, Αμφιάλη, Νίκαια, Λαμία, Νέο Ηράκλειο, Φιλοθέη Νέο Ψυχικό, Καβάλα, Αργυρούπολη, Αρτέμιδα, Περιστέρι Κέντρο, Ηράκλειο Κρήτης, Νέος Κόσμος, Λευκάδα