

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελίδα 135

A2. Σχολικό σελίδα 51

A3. Σχολικό σελίδα 23

A4.

α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β

B1

Θέτουμε όπου $x+1$ το y .

Οπότε $f(y) = ye^{-(y-1)} = ye^{1-y}$

Άρα $f(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$.

B2.

$$f'(x) = e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$ είναι συνεχής στο 1, άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

B3.

$$f''(x) = [(1-x)e^{1-x}]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = e^{1-x}(x-2).$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$.

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$.

Οπότε παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(2, f(2)) \equiv \left(2, \frac{2}{e}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^{x-1})'} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

Η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty.$$

Άρα στο $-\infty$ δεν έχει ασύμπτωτες.

B4.

(i)

$A_1 = (-\infty, 1]$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$.

$A_2 = (1, +\infty)$. Στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, 1)$

Άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

(ii)

$$f(x) = \lambda$$

$$\text{Αν } \lambda \leq 0$$

$\lambda \in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1 . (λόγω μονοτονίας στο A_1)

$$\text{Αν } 0 < \lambda < 1$$

$\lambda \in f(A_1)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_1 . (λόγω μονοτονίας στο A_1)

$\lambda \in f(A_2)$ άρα έχει ακριβώς μία λύση στο A_2 . (λόγω μονοτονίας στο A_2)

Άρα έχει 2 ακριβώς λύσεις.

Για $\lambda=1$ ακριβώς μία λύση

Για $\lambda > 1$ καμία λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Για $x < 0$: η f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$: η f συνεχής ως τριγωνομετρική

Στο $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$$

Προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $f(0)=1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

Επομένως, η f συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a^3-3x^2-x+1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(a^2-3x-1)}{x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ2)

i) Η f συνεχής στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική και f συνεχής στο $x_0=0$. Άρα η f συνεχής $[0, \frac{3\pi}{2}]$

- Η f παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$, με $f'(x) = -\eta\mu x$

- $f(0)=1$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{Προκύπτει ότι } f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Άρα, η f δεν ικανοποιεί την τρίτη προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle

ii) Θεωρώ $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \subseteq \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

Η f συνεχής $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, με $f'(x) = -\eta\mu x$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Άρα, από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \subseteq \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$

Γ3) Ισχύει ότι $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$ για $x < 0$

Έστω ότι υπάρχει $(x_0, f(x_0)) \in C_f$ με $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ τότε $3ax_0^2 - 6x_0 - 1 = 0$ (1)

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3a)(-1) = 36 + 12a = 12(3+a)$$

Από υπόθεση $a < -3 \Rightarrow a + 3 < 0$ άρα $\Delta < 0$ άρα η (1) είναι αδύνατη δηλαδή $f'(x) \neq 0$

Οπότε δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης με αρνητική τετμημένη τέτοια ώστε να επιδέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον x' .

Γ4

- Για $x < 0$: $f'(x) < 0$
- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$: $f'(x) = -\eta\mu x$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \pi$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	-	-	0	+
f				

Arrows in the 'f' row indicate: decreasing from $-\infty$ to 0 , decreasing from 0 to π , and increasing from π to $\frac{3\pi}{2}$.

Η $f'(x) < 0$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \pi)$ και f συνεχής στο 0 και π άρα, η $f \downarrow (-\infty, \pi)$
 Η $f'(x) > 0$, $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ και f συνεχής στο π και $\frac{3\pi}{2}$ άρα, η $f \uparrow [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Επομένως η f στο $x = \pi$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi) = -1$.

Άρα, $f(x) \geq f(\pi)$, για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

Δηλαδή $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow x \ln x - 1 = 0.$$

$$\text{Θέτω } \varphi(x) = x \ln x - 1$$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\varphi(1) = -1 < 0$$

$$\varphi(e) = e - 1 > 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1 (*)$$

$$\varphi'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$



ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Τα καλύτερα Φροντιστήρια της πόλης

Για $x \in (1, e)$ $\ln x + 1 > 0$, άρα $\varphi'(x) > 0$

Συνεπώς η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$

Οπότε το x_0 μοναδική ρίζα στο $(1, e)$.

Δ2. $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x + 1) - \ln x - 1$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$$

$$\text{Θέτω } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln x_0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln x_0} = x_0 (*)$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f		↗	↘

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0) = \ln x_0(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1$

$$f(x_0) = x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1$$

$$f(x_0) = x_0 \ln x_0 - 1 = 0 \text{ από ερώτημα Δ1.}$$

Δ3. $g(x) = h(x) \Leftrightarrow x e^{-x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow x e^{-x} e^{x+1} = x_0^{x+1} \Leftrightarrow x \cdot e = x_0^{x+1} \Leftrightarrow$

$$\ln(xe) = \ln x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln e + \ln x = (x + 1) \ln x_0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = x \ln x_0 + \ln x_0 \quad (1)$$

Για $x = x_0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 1 + \ln x_0 = x_0 \ln x_0 + \ln x_0$ ισχύει λόγω του Δ1.

$$g'(x) = e^{-x} - x e^{-x} \Rightarrow g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} \Leftrightarrow g'(x_0) = e^{-x_0}(1 - x_0)$$

$$h(x) = e^{(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)}$$

$$h'(x) = e^{(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)} \cdot \ln \frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln \left(\frac{x_0}{e}\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1) \quad (2)$$

$$x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \quad (3)$$

$$x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{1}{x_0}} \Leftrightarrow \frac{x_0}{e} = e^{\frac{1}{x_0}-1} \quad (4)$$

$$\stackrel{(2),(3),(4)}{\Rightarrow} h'(x_0) = \left(e^{\frac{1}{x_0}-1}\right)^{x_0+1} \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow h'(x_0) = e^{\frac{1}{x_0}} e^{-x_0} \frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow h'(x_0) = x_0 e^{-x_0} \frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow h'(x_0) = g'(x_0).$$

Δ4. $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε $x > 0$ $A(x, f(x))$ $B(x, \varphi(x))$

Έστω συνάρτηση $K(x) = f(x) - \varphi(x)$ η απόσταση γίνεται ελάχιστη στο x_0 .

Άρα ισχύει $K(x) \geq K(x_0)$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως $\varphi(x) = f(x) - K(x)$.



ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Τα καλύτερα Φροντιστήρια της πόλης

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - K(x) - f(x_0) + K(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0} \right) = l_1$$

$$\text{Ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$$

Και ισχύει $K(x) > K(x_0)$ κοντά στο x_0 , άρα για $x < x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

Οπότε $l_1 = +\infty$

Ομοίως για $x > x_0$ το $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \dots = -\infty$ δηλαδή $l_2 = -\infty$

Άρα $l_1 \neq l_2$, συνεπώς η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , οπότε το $x = x_0$ είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Β Λύση

Έστω $K(x) = f(x) - \varphi(x)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(x - x)^2 - (f(x) - \varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| \text{ με } f(x) > \varphi(x) \text{ για } x > 0$$

Άρα $d(A, B) = f(x) - \varphi(x), x > 0$.

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $K(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $K'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$ όπου x_0 ελάχιστο, άρα $K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \stackrel{\Delta 3}{\Rightarrow} \varphi'(x_0) = 0$, επομένως κρίσιμο σημείο.
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.

Επιμέλεια:

ΚΑΛΑΪΤΖΙΔΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ

ΜΠΟΤΣΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ, ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΜΑΝΩΛΗΣ, ΤΡΑΣΤΑΝΑΣ ΑΝΤΩΝΗΣ, ΧΑΪΔΕΜΕΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ, ΚΟΝΤΟΣΤΕΡΓΙΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ, ΓΕΩΡΓΟΥΣΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ, ΠΕΤΡΑ ΖΩΗ, ΖΕΝΙΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, ΑΛΕΥΡΟΝΤΑΣ ΣΕΡΑΦΕΙΜ, ΣΑΜΑΡΤΖΗΣ ΠΕΤΡΟΣ, ΗΛΙΑΔΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ, ΚΑΡΑΚΩΝΣΤΑΝΤΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ, ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗ ΝΙΚΗ, ΦΡΑΝΤΖΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ, ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ, ΣΚΟΥΛΑΞΕΝΟΣ ΒΑΓΓΕΛΗΣ, ΚΑΚΛΑΜΑΝΗΣ ΝΙΚΟΣ, ΓΙΑΝΝΑΚΟΥ ΝΙΚΗ, ΓΚΟΛΕΜΗ ΡΕΝΙΑ, ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ, ΜΗΤΡΟΓΛΟΥ ΝΑΣΟΣ, ΠΑΠΑΛΙΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ, ΓΚΑΝΑΤΣΙΟΣ ΣΤΕΛΙΟΣ, ΚΟΥΚΟΥΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΤΣΙΟΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ.

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιά, Κερατσίνι, Αμφιάλη, Λαμία, Βριλήσσια, Κιάτο, Πετρούπολη, Νέα Φιλαδέλφεια, Περιστέρι Κέντρο, Καβάλα, Μοσχάτο, Αρτέμιδα, Βούλα, Ηράκλειο Κρήτης, Αλεξανδρούπολη, Θεσσαλονίκη Πεύκα.