ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1.σχολ. σελ. 133

Α2. α. σχολ. Σελ. 95

β. σχολ. Σελ. 104

Α3. 1. α. Λ β. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

2. α. Λ β. σχολ. Σελ. 141 $f(x) = \begin{cases} x^2, & αν\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & αν\ x > 1 \end{cases}$

Α4. δ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε ότι x∈ ℝ. Θέτω $lnx = u$, με x>0. Άρα $x = e^u$. Άρα $f(u) = \frac{e^u-1}{e^u+1}$.

Οπότε $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

Β2. $f'(x) = \frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x+1)'(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ, άρα αντιστρέφεται.

Έστω $y = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Leftrightarrow (e^x+1)y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x y + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x(y-1) = -y-1$

$\overset{y\neq 1}{\Longleftrightarrow} e^x = \frac{-y-1}{y-1}$.

Πρέπει $-\frac{y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} < 0 \Leftrightarrow y \in (-1, 1)$

Άρα $f^{-1}(x) = ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), x \in (-1, 1)$

Β3. $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), x \in (-1, 1)$

$h'(x) = \frac{1-x}{x+1}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x+1} \cdot \frac{1-x+(x+1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(x+1)(1-x)} > 0$ στο (-1,1) άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,1)

$h''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^3}$
$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$h''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $h''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ είναι παραγωγίσιμη στο (-1,1)
Άρα η h είναι κοίλη στο (-1,0] κυρτή στο [0, 1) και παρουσιάζει σημείο καμπής το O(0,0)

B4.
Κατακόρυφες ασύμπτωτες θα εξετάσουμε στο -1 και στο 1.

$\lim_{x\to 1^-} ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

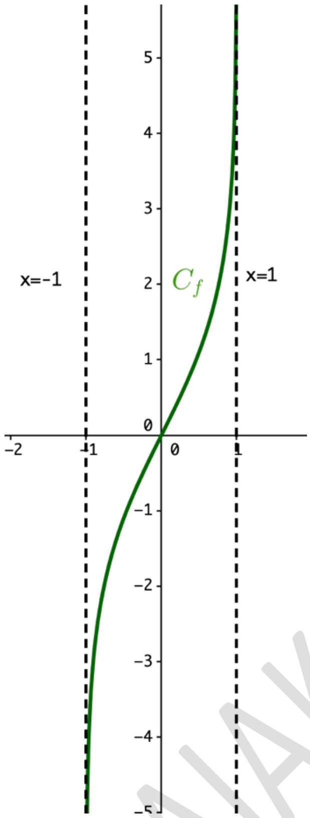
Θέτω $u = \frac{x+1}{1-x}$
$u_0 = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left((x+1)\frac{1}{1-x}\right) = 2\cdot(+\infty) = +\infty$ διότι:
$\lim_{x\to 1^-}(1-x) = 0$, κοντά στο 1^- ισχύει $1-x > 0$ άρα $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}\right) = +\infty$.

$\lim_{x\to 1^-} ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = \lim_{u\to +\infty} lnu = +\infty$

$\lim_{x\to -1^+} ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

Θέτω $u = \frac{x+1}{1-x}$
$u_0 = \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 0^+$ διότι:
$\lim_{x\to 1^-} ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = \lim_{u\to 0^+} lnu = -\infty$

Άρα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 1$ και $x = -1$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ΝΜ//ΒΓ, γιατί είναι κάθετες στην ίδια ευθεία. Τα τρίγωνα ΑΝΜ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν την γωνία Α κοινή, και $A\widehat{N}M = A\widehat{B}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη. Άρα ο λόγος ομοιότητας ισούται με το λόγο ομοιότητας των υψών τους.

$\frac{AE}{A\Delta} = \frac{NM}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{5-x}{5} = \frac{NM}{10} \Leftrightarrow NM = 2(5-x)$

$E = NK \cdot NM \Longrightarrow E(x) = x \cdot 2 \cdot (5-x) = 10x - 2x^2.$

Πρέπει $x > 0$ και $2(5-x) > 0 \Leftrightarrow x < 5$

Άρα $x \in (0, 5)$.

Γ2.

$E'(x) = -4x + 10$

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	5	$+\infty$
E'(x)		+	0	−	
E		↗	ο.μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η Ε παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $E\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}$ τ.μον.

Γ3.

$\lambda = \lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^-} ln(5-2x)$

Θέτω επίσης $5 - 2x = \omega$

Άρα $\lambda = \lim\limits_{\omega \to 0^+} ln(\omega) = -\infty$

$\lim_{x\to\frac{5}{2}^-}(2E(x)-25)=2E\left(\frac{5}{2}\right)-25=0$
$2E(x)-25<0$ για x κοντά στο 5/2, αφού η Ε έχει μέγιστο το 25/2.

Οπότε:
$\lim_{x\to\frac{5}{2}^-}\frac{1}{2E(x)-25}=-\infty.$

Άρα $\lim_{x\to\frac{5}{2}^-}\frac{ln(5-2|x|)}{2E(x)-25}=(-\infty)(-\infty)=+\infty.$

Γ4.
$x_0>0\Leftrightarrow e^{x_0}>1\Leftrightarrow \sqrt[2020]{e^{x_0}}>1\Leftrightarrow \sqrt[2020]{e^{x_0}}+\frac{23}{2}>1+\frac{23}{2}=\frac{25}{2}\Leftrightarrow E(x_0)>\frac{25}{2}$. Το οποίο είναι άτοπο, αφού το 25/2 είναι μέγιστο.

ΘΕΜΑ Δ
Δ1. $f(x)\geq ln2\cdot x+1\Leftrightarrow f(x)-ln2\cdot x-1\geq 0.$
Έστω $h(x)=f(x)-ln2\cdot x-1.$
$h'(x)=\alpha^x lna-ln2$
$h(0)=f(0)-1=0$
Η h είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο 0, και $h(x)\geq h(0)$. Άρα από Θεώρημα Fermat $h'(0)=0\Leftrightarrow lna-ln2=0\Leftrightarrow a=2.$

Δ2. $\varphi(x)=2^x+x^2-2x-1$
$\varphi'(x)=2^x ln2+2x-2$
$\varphi''(x)=2^x(ln2)^2+2>0$
Άρα η φ θα είναι κυρτή.

Δ3. $\varphi(x)=2^x+x^2-2x-1$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=0$ και $\varphi(1)=0$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες ρίζες.

Έστω ότι είχε 3 ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $\varphi(\rho_1)=\varphi(\rho_2)=0$, άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(x_1)=0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_2,\rho_3]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_2,ρ_3) με $\varphi(\rho_2)=\varphi(\rho_3)=0$, άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(x_2)=0$.

Η φ' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $\varphi'(x_1)=\varphi'(x_2)=0$, άρα από Θεώρημα Rolle θα υπήρχε ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi''(\xi)=0$. Το οποίο είναι άτοπο από το ερ. **Δ2.**

Οι εφαπτομένες έχουν εξισώσεις
ε1: $y-\varphi(0)=\varphi'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=(ln2-2)x\Leftrightarrow y=ln\left(\frac{2}{e^2}\right)x$

και

ε2: $y-\varphi(1)=\varphi'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2ln2(x-1)$.

Δ4. Η φ είναι κυρτή, άρα $\varphi(x) \geq ln4(x-1)$. Η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφης. Δηλαδη για $x=1$.
Έστω $h(x)=ln4 \cdot x-ln4$ (η δεύτερη εφαπτομένη ε_2).
$h(\eta\mu x+2)=ln4 \cdot \eta\mu x+ln4$.
$\varphi(\eta\mu x+2)=ln4 \cdot \eta\mu x+ln4 \Leftrightarrow \varphi(\eta\mu x+2)=ln4 \cdot (\eta\mu x+2-1)=h(\eta\mu x+2)$
Η φ είναι κυρτή, άρα οι f και η φ έχουν ένα κοινό σημείο το με τετμημένη 1.
Άρα:

$$\eta\mu x+2=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}, \kappa$$

Δ5.
$\varphi'(e^x)-\varphi'(\lambda x) \geq 0$
$\Leftrightarrow \varphi'(e^x) \geq \varphi'(\lambda x) \xLeftrightarrow{\varphi' \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} e^x \geq \lambda x.$
Έστω $h(x)=e^x-\lambda x$.
$h'(x)=e^x-\lambda$
$h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-\lambda=0 \Leftrightarrow x=ln\lambda, \lambda>0$

$$h'(x)>0 \Leftrightarrow x>ln\lambda,$$
$$h'(x)<0 \Leftrightarrow x<ln\lambda$$

Είναι συνεχής στο lnλ, άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $ln\lambda$, το
$h(ln\lambda)=\lambda-\lambda ln\lambda$.
$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda-\lambda ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(1-ln\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow ln\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq e.$ Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ, είναι λ=e.

ΜΠΟΤΣΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ