

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α) §1.2 σελ 15

β) §1.3 σελ 35

A2. §2.7 σελ 142

A3. § 2.6 σελ 135

A4. α) ΛΑΘΟΣ θεώρημα σελ 133 παράδειγμα σελ 134

β) ΛΑΘΟΣ διότι μπορεί η f να μην είναι συνεχής, παράδειγμα σελ 71

A5. γ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$f(x) = e^{-x} + \lambda$$

Αφού η $y = 2$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$$

$$0 + \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\lambda = 2$$

B2.

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως πράξη συνεχών.

Έστω $g(x) = f(x) - x$

Η g συνεχής στο $[2, 3]$ ως πράξη συνεχών.

$$g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0$$

$$g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } x_0 \in (2, 3): g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} - 1 < 0$$

η g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} οπότε η λύση είναι μοναδική.

B3.

$f'(x) = -e^{-x} < 0$, η f είναι γν.φθίνουσα στο \mathbb{R} οπότε είναι 1-1, και ορίζεται η αντίστροφή της.

Η f συνεχής στο \mathbb{R} και γν.φθίνουσα άρα

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (2, +\infty)$$

$$\text{Άρα } A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$$

$$\text{Θέτω } f(x) = y \Rightarrow y = e^{-x} + 2 \Rightarrow e^{-x} = y - 2 \Rightarrow$$

$$-x = \ln(y - 2) \Rightarrow x = -\ln(y - 2)$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$$

B4.

$$f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$$

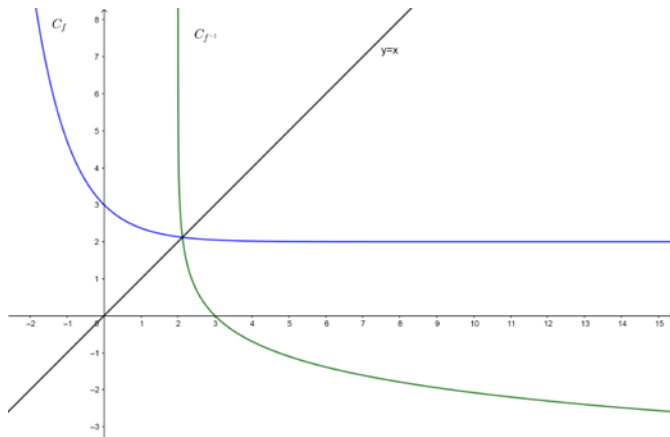
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x - 2))$$

$$\text{θέτω } u = x - 2$$

$$\text{άρα } x \rightarrow 2^+ \text{ άρα } u \rightarrow 0^+$$

$$\text{οπότε } \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln(u)) = -(-\infty) = +\infty$$

άρα η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη



ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΜΑΡΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ

ΚΑΜΜΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΠΙΔΑ