

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό σελίδα 145 (i)
A2. Σχολικό σελίδα 183
A3. (α) Σωστή, (β) Σωστή, (γ) Σωστή, (δ) Σωστή, (ε) Λανθασμένη

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Είναι f γνησίως μονότονη και $f(1) = 3 < 5 = f(3)$. Άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
B2. Η f είναι "1-1" ως γνησίως μονότονη.

$$\begin{aligned} f(f(e^{5-x})) = 5 &\Leftrightarrow f(f(e^{5-x})) = f(3) \stackrel{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow f(e^{5-x}) = 3 \Leftrightarrow f(e^{5-x}) = f(1) \stackrel{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow e^{5-x} = 1 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

- B3.** Η f είναι αντιστρέψιμη ως "1-1".

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 1$$

$$f(3) = 5 \Leftrightarrow f^{-1}(5) = 3 \text{ και έτσι } f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(3) = 1$$

- B4.** Επειδή $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ και η f αντιστρέφεται, η αντίστροφη f^{-1} ορίζεται στο $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Επομένως η ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 + 4x) - 2) < 3$ ορίζεται αν $x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x < -4$ ή $x > 0$ (1)

$$\begin{aligned}
 f(f^{-1}(x^2 + 4x) - 2) < 3 &\Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2 + 4x) - 2) < f(1) \Leftrightarrow \\
 &\stackrel{\text{γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x^2 + 4x) - 2 < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f^{-1}(x^2 + 4x) < 3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f^{-1}(x^2 + 4x) < f^{-1}(5) \stackrel{\text{γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 4x < 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -5 < x < 1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Άρα από (1) και (2) θα είναι $x \in (-5, -4) \cup (0, 1)$.

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και επειδή διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,1)$ θα είναι $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in (1,3)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ $x \in [1,3]$.

Είναι g συνεχής στο $[1,3]$ ως διαφορά των συνεχών $y=f(x)$, $y=x$ και $g(1)g(3) = (f(1)-1)(f(3)-3) = 2(-2) = -4 < 0$.

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. Άρα η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in (1,3)$.

- Γ2.:** Για κάθε σημείο $M(x, f(x))$ της C_f η απόσταση (OM) είναι: $(OM) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$.

Θεωρώντας τη συνεχή συνάρτηση $d(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ $x \in [1,3]$ από το θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχει $x_1 \in [1,3]$ ώστε $d(x) \geq d(x_1)$ για κάθε $x \in [1,3]$.

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

Όμως $d(1) = d(3) = \sqrt{10} > d(2) = \sqrt{5}$. Έτσι υπάρχει $x_1 \in (1,3)$ ώστε $d(x) \geq d(x_1)$ για κάθε $x \in [1,3]$.

Γ3. Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία OM_1 αρκεί ναδειχθεί ότι:

$$\lambda_{\text{εφ}} \lambda_{OM} = -1 \Leftrightarrow f'(x_1) \frac{f(x_1)}{x_1} = -1 \Leftrightarrow f'(x_1) f(x_1) = -x_1 \quad (1)$$

Στο Β2 δείξαμε ότι η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 \in (1,3)$. Επίσης η d είναι παραγωγίσιμη με $d'(x) = \frac{f'(x)f(x)+x}{\sqrt{x^2+f^2(x)}}$.

Το θεώρημα Fermat δίνει ότι $d'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1)f(x_1) = -x_1$ δηλαδή δείχθηκε η (1).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$F'(x)e^{F(x)} + F'(x) = 1$$

$$F'(x) = \frac{1}{e^{F(x)} + 1} \quad \text{και} \quad F''(x) = -\frac{F'(x)e^{F(x)}}{(e^{F(x)} + 1)^2}$$

Είναι $F'(x) > 0$ δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Επίσης $F''(x) < 0$ δηλαδή η F είναι κοίλη \mathbb{R} .

Δ2. Στο κοινό σημείο M των C_F , x' είναι: $F(x_M) = 0$

$$e^{F(x_M)} + F(x_M) = 1 + x_M$$

$$e^0 + 0 = 1 + x_M$$

$$x_M = 0$$

Άρα το σημείο επαφής είναι η αρχή $O(0,0)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Δ3. Η F ως γνήσια αύξουσα είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $y = F(x)$ η αρχική ισότητα δίνει

$$e^{F(x)} + F(x) = 1 + x$$

$$e^y + y = 1 + x$$

$$x = e^y + y - 1$$

Άρα $F^{-1}(x) = e^x + x - 1 \quad x \in \mathbb{R}$

Δ4. Κάνοντας αντικατάσταση με τη βοήθεια της αντίστροφης έχουμε

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 F(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^\alpha y(e^y + 1) dy = \\
 &= \int_0^\alpha ye^y dy + \int_0^\alpha y dy = \\
 &= [ye^y]_0^\alpha - \int_0^\alpha e^y dy + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^\alpha = \\
 &= [ye^y]_0^\alpha - [e^y]_0^\alpha + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^\alpha = \\
 &= \alpha e^\alpha - e^\alpha + 1 + \frac{\alpha^2}{2}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l}
 y = F(x) \\
 F^{-1}(y) = x \Leftrightarrow x = e^y + y - 1 \\
 (1) \left\{ \begin{array}{l} dx = (e^y + 1) dy \\ x = 0 : y = F(0) = 0 \\ x = 1 : y = F(1) = \alpha \end{array} \right.
 \end{array} \right\}$$

Δ5. Στο Γ_1 δείξαμε ότι η F είναι κοίλη στο \mathbb{R} . Έτσι η εφαπτομένη $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x$ του Γ_2

ερωτήματος θα βρίσκεται πάνω από την C_F . Δηλαδή

$$F(x) \leq \frac{x}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
 Δέσποινα Σωτηροπούλου