

Παρασκευή, 10 Ιουλίου 2015

Πρόβλημα 1. Λέμε ότι ένα πεπερασμένο σύνολο \mathcal{S} , που αποτελείται από σημεία του επιπέδου, είναι *ισορροπημένο*, αν για κάθε δυο διαφορετικά σημεία A και B του \mathcal{S} , υπάρχει σημείο C του \mathcal{S} τέτοιο ώστε $AC = BC$. Λέμε ακόμα ότι το σύνολο \mathcal{S} είναι *ελεύθερο κέντρο*, αν για οποιαδήποτε τρία διαφορετικά σημεία A, B και C του \mathcal{S} , δεν υπάρχει σημείο P του \mathcal{S} τέτοιο ώστε $PA = PB = PC$.

(a) Να αποδείξετε ότι για όλους τους ακέραιους $n \geq 3$, υπάρχει ένα *ισορροπημένο* σύνολο, που αποτελείται από n σημεία.

(b) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους $n \geq 3$, για τους οποίους υπάρχει ένα *ισορροπημένο* και *ελεύθερο κέντρο* σύνολο, που αποτελείται από n σημεία.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (a, b, c) θετικών ακεραίων, που είναι τέτοιες ώστε κάθε ένας από τους αριθμούς

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

είναι δύναμη του 2.

(Δύναμη του 2 είναι ένας ακέραιος της μορφής 2^n , όπου n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος.)

Πρόβλημα 3. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AB > AC$. Έστω Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του, H το ορθόκεντρό του και F το ίχνος του ύψους του από την κορυφή A . Έστω M το μέσον της πλευράς BC . Έστω Q το σημείο πάνω στον κύκλο Γ , τέτοιο ώστε $\angle HQA = 90^\circ$ και έστω K το σημείο πάνω στον κύκλο Γ , τέτοιο ώστε $\angle HKQ = 90^\circ$. Υποθέτουμε ότι τα σημεία A, B, C, K και Q είναι όλα διαφορετικά και βρίσκονται πάνω στον κύκλο Γ με τη σειρά που δίνονται.

Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων KQH και FKM εφάπτονται μεταξύ τους.

Σάββατο, 11 Ιουλίου 2015

Πρόβλημα 4. Τρίγωνο ABC έχει περιγεγραμμένο κύκλο Ω και περίκεντρο O . Ένας κύκλος Γ με κέντρο A τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BC στα σημεία D και E έτσι ώστε τα σημεία B, D, E και C να είναι όλα διαφορετικά και να βρίσκονται πάνω στην ευθεία BC με αυτή τη σειρά. Έστω F και G τα σημεία τομής των κύκλων Γ και Ω έτσι ώστε A, F, B, C και G να βρίσκονται πάνω στον κύκλο Ω με αυτή τη σειρά. Έστω K το δεύτερο σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου BDF και του ευθύγραμμου τμήματος AB . Έστω L το δεύτερο σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου CGE και του ευθύγραμμου τμήματος CA . Υποθέτουμε ότι οι ευθείες FK και GL είναι διαφορετικές και τέμνονται στο σημείο X . Να αποδείξετε ότι το σημείο X βρίσκεται πάνω στην ευθεία AO .

Πρόβλημα 5. Έστω \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y .

Πρόβλημα 6. Η ακολουθία a_1, a_2, \dots ακεραίων αριθμών ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- (i) $1 \leq a_j \leq 2015$, για κάθε $j \geq 1$,
- (ii) $k + a_k \neq l + a_l$, για κάθε $1 \leq k < l$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο θετικοί ακέραιοι b και N τέτοιοι ώστε

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

για όλους τους ακέραιους m και n , για τους οποίους ισχύει $n > m \geq N$.