

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό θεώρημα-απόδειξη σελίδας 76
A2. Σχολικό ορισμός σελίδας 94
A3. (α) Λάθος, (β) Λάθος, (γ) Λάθος, (δ) Λάθος, (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Τα μεταβλητα μεγέθη που θα μας απαιτήσουν είναι το εμβαδόν E και ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ε .

Η ευθεία ε έχει εξίσωση:

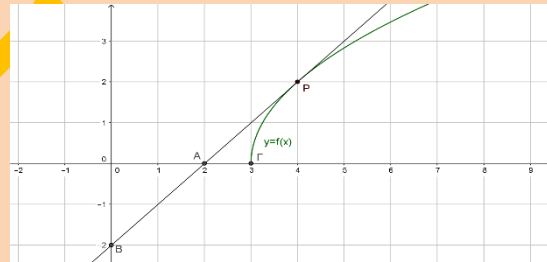
$$\varepsilon: y - 2 = \lambda(x - 4) \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία A, B .

Η (1) για $y = 0$ δίνει $x_A = \frac{4\lambda - 2}{\lambda}$ και πάλι η (1) για $x = 0$ δίνει $y_B = 2 - 4\lambda$.

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι $E = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}|x_A||y_B| = \frac{4(2\lambda - 1)^2}{\lambda}$.

Για κάθε χρονική στιγμή t είναι $E(t) = \frac{4(2\lambda(t) - 1)^2}{\lambda(t)}$ και τότε



Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= 4 \frac{2(2\lambda(t)-1)2\lambda'(t)\lambda(t) - (2\lambda(t)-1)^2\lambda'(t)}{\lambda^2(t)} = \\
 &= 4(2\lambda(t)-1)\lambda'(t) \frac{2\lambda(t)+1}{\lambda^2(t)} = \\
 &= 4\lambda'(t) \frac{4\lambda^2(t)-1}{\lambda^2(t)}
 \end{aligned}$$

Τη στιγμή t_0 που η ε διέρχεται από το Κ είναι $\lambda(t_0) = \lambda_{PK} = \frac{2+1}{4-1} = 1$ και $\lambda'(t_0) = 4$.

Επομένως $E'(t_0) = 4\lambda'(t_0) \frac{4\lambda^2(t_0)-1}{\lambda^2(t_0)} = 48 \mu^2 / \text{min}$

B2. Στο σημείο επαφής P ισχύουν:

$$f(4) = 2 \Leftrightarrow \mu\sqrt{4+v} = 2 \quad (2)$$

$$f'(4) = \lambda(t_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{2\sqrt{4+v}} = 1 \Leftrightarrow \mu = 2\sqrt{4+v} \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει:
 $\mu = 2, v = -3$

B3. Τη χρονική στιγμή t_0 το υπολογιζόμενο χωρίου είναι το μικτόγραμμο τρίγωνο ΑΓΡ όπου $A(2,0), \Gamma(3,0), P(4,2)$ και $\varepsilon: y-2=1(x-4) \Leftrightarrow y=x-2$,

$$f(x) = 2\sqrt{x-3}$$

$$\mathcal{E} = \int_2^3 y(x) dx + \int_3^4 (y(x) - f(x)) dx = \int_2^3 (x-2) dx + \int_3^4 (x-2-2\sqrt{x-3}) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{4}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}} \right]_3^4 = \frac{2}{3} \mu^2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $g(x) = \frac{F(x)-3x}{x}$ με x κοντά στο 0. Τότε $F(x) = xg(x) + 3x$

Η F είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη: $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 3x) = 0 + 0 = 0$.

Άρα το (0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της F.

Γ2: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $\varepsilon: y - F(0) = F'(0)(x - 0) \quad (1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) + 3) = 5 = F'(0)$$

Από (1) είναι $\varepsilon : y - 0 = 5(x - 0) \Leftrightarrow y = 5x$

Γ3. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = F(x) - x + 6 \quad x \in [0, 9]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον $x_0 \in (0, 9)$ ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow F(x_0) = x_0 - 6$.

Έτσι η ευθεία με εξίσωση $y = x - 6$ τέμνει την C_F σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 9)$.

Γ4. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στη F στο $[0, 9]$. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 9)$ έτσι ώστε $F'(\xi) = 0$. Η F ως κυρτή έχει F' γνησίως αύξουσα.

Για $x < \xi$ είναι $F'(x) < F'(\xi) \Leftrightarrow F'(x) < 0$ F γν.φθίνουσα στο $[0, \xi]$

Για $x > \xi$ είναι $F'(x) > F'(\xi) \Leftrightarrow F'(x) > 0$ F γν.αύξουσα στο $[\xi, 9]$

Άρα η F παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \xi$ που είναι μοναδικό.

Γ5. Επειδή η F είναι κυρτή, η γραφ.παράσταση C_F βρίσκεται "πάνω" από κάθε εφαπτομένη της C_F . Έτσι λόγω του Γ2 θα είναι $F(x) \geq 5x \quad x \in [0, 9]$

Έτσι $F(x) \geq 5x \Leftrightarrow F(x) - 5x \geq 0$ και τότε

$$\begin{aligned} \int_0^2 (F(x) - 5x) dx > 0 &\Leftrightarrow \int_0^2 F(x) dx > \int_0^2 5x dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^2 F(x) dx > 5 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 F(x) dx > 10 \end{aligned}$$

Επίσης από το Γ4 είναι για κάθε $x \in [0, 9]$ $F(x) \geq F(\xi) \Leftrightarrow F(x) - F(\xi) \geq 0$ και τότε

$$\begin{aligned} \int_0^9 (F(x) - F(\xi)) dx > 0 &\Leftrightarrow \int_0^9 F(x) dx > \int_0^9 F(\xi) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^9 F(x) dx > F(\xi) [x]_0^9 \Leftrightarrow \int_0^9 F(x) dx > 9F(\xi) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. φ συνεχής ως άθροισμα συνεχών με $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$. Άρα φ γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Επίσης $\varphi''(x) = e^x > 0$ δηλαδή η φ είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Δ2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \dots = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \dots = -\infty$

Έτσι το σύνολο τιμών είναι $\varphi(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$0 \in \varphi(\mathbb{R})$ και φ γν.αύξουσα Έτσι υπάρχει μοναδικό x_0 ώστε $\varphi(x_0) = 0$

Δ3. g συνεχής στο $(-\infty, 5)$ ως σύνθεση συνεχών με $g'(x) = -\frac{1}{5-x} < 0$. Άρα g γνησί-
ως φθίνουσα στο $(-\infty, 5)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = \dots = -\infty$$

Δ4. Από το Δ2 έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) = 0 &\Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = 5 - x_0 \quad x_0 < 5 \\ &\Leftrightarrow x_0 = \ln(5 - x_0) \Leftrightarrow x_0 = g(x_0) \end{aligned}$$

Δ5. Η εφαπτομένη είναι

$$\begin{aligned} \varepsilon : y - \varphi(\ln \alpha) &= \varphi'(\ln \alpha)(x - \ln \alpha) \Leftrightarrow y - (\alpha + \ln \alpha - 5) = (\alpha + 1)(x - \ln \alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = (\alpha + 1)(x - \ln \alpha) + (\alpha + \ln \alpha - 5) \end{aligned}$$

Δ6. Από το Δ1 η φ είναι κυρτή στο \mathbb{R} . Τότε C_φ "πάνω" από την εφαπτομένη ε . Δηλαδή

$$\begin{aligned} e^x + x - 5 &\geq (\alpha + 1)(x - \ln \alpha) + (\alpha + \ln \alpha - 5) \\ e^x + x &\geq (\alpha + 1)(x - \ln \alpha) + (\alpha + \ln \alpha) \end{aligned}$$