

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**  
**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία σελίδα 99-100

**A2.** Θεωρία σελίδα 185

**A3.** Θεωρία σελίδα 157

**A4.** 1. Λ 2. Σ 3. Σ 4. Λ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Θεωρούμε συνάρτηση  $g(x) = \ln x \cdot f(x)$  όπου:

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[1,2]$  ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων ( η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1,2]$  άρα και συνεχής )

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1,2)$  ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ακόμα  $g(1) = \ln 1 \cdot f(1) = 0$  και  $g(2) = \ln 2 \cdot f(2) = 0$ . Επομένως από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1,2)$ :  $g'(\xi) = 0$ , όπου

$$g'(x) = (\ln x \cdot f(x))' = \frac{1}{x} \cdot f(x) + \ln x \cdot f'(x). \text{ Άρα, } \frac{1}{\xi} \cdot f(\xi) + \ln \xi \cdot f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} \cdot f(\xi) = -\ln \xi \cdot f'(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) = -\xi \cdot \ln \xi \cdot f'(\xi).$$

**B2.** Έχουμε  $g(x) = \ln x \cdot f(x) \Leftrightarrow g(x) = \ln x \cdot (3x^2 - 2x)$  με

$$g'(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x^2 - 2x) + \ln x \cdot (6x - 2) \Leftrightarrow g'(1) = 1 + \ln 1 \cdot 4 = 1 \text{ και}$$

$g(1) = \ln 1 \cdot (3 - 2) = 0$ . Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

**B3.** Έχουμε ότι  $g(x) = \ln x \cdot (3x^2 - 2x)$  με  $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot (3x^2 - 2x) + \ln x \cdot (6x - 2) \Leftrightarrow$

$$g'(x) = (3x - 2) + \ln x \cdot (6x - 2) \quad \text{και} \quad g''(x) = \frac{6x \cdot \ln x + 9x - 2}{x}.$$

Θεωρούμε  $h(x) = 6x \cdot \ln x + 9x - 2$  που είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  $h'(x) = 6\ln x + 6 + 9 = 6\ln x + 15 > 0$  και αφού η συνάρτηση  $h(x)$  είναι και συνεχής έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $x \geq 1$  και  $h(x) \geq h(1) = 7 > 0$ . Άρα  $g''(x) > 0$  για κάθε  $x \geq 1$  και  $g$  συνεχής στο  $[1, +\infty)$  άρα η  $g$  είναι κυρτή στο  $[1, +\infty)$ . Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ ,  $C_g$ , θα βρίσκεται πάνω από την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(1, g(1))$ . Άρα  $g(x) \geq x - 1 \Leftrightarrow \ln x \cdot (3x^2 - 2x) \geq x - 1$ .

$$\begin{aligned} \text{B4. Έχουμε ότι } \int_1^e \ln x \cdot (x^3 - x^2)' dx &= [\ln x \cdot (x^3 - x^2)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot (x^3 - x^2)' dx = \\ &= e^3 - e^2 - \int_1^e (x^2 - x) dx = e^3 - e^2 - \left[ \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \right]_1^e = e^3 - e^2 - \left[ \left( \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= e^3 - e^2 - \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2e^3}{3} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2e^3 - 3e^2 + 1}{6}. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \ln x + 1$  και

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$\text{με } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} < 0$$

Για  $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$  έχω  $f'(x) < 0$  και

$f$  συνεχής στο  $\left(0, \frac{1}{e}\right]$  άρα η συνάρτηση  $f$

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	Γν. φθίνουσα		Γν. αύξουσα

είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ , ενώ για  $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$  έχω  $f'(x) > 0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$  άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ . Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x = \frac{1}{e}$ , το  $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ .

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{1} = 0$$

Ενώ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln x) = +\infty$ . Επομένως το σύνολο τιμών θα είναι

$$f((0, +\infty)) = \left[ f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) \cup \left[ f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[ -\frac{1}{e}, 0 \right) \cup \left[ -\frac{1}{e}, +\infty \right) = \left[ -\frac{1}{e}, +\infty \right)$$

**Γ2.** Έχουμε ότι  $x^x = e^{2017} \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e^{2017} \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 2017 \Leftrightarrow f(x) = 2017$ .

Για  $x > \frac{1}{e}$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και  $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$  όπου το  $2017 \in \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ . Άρα υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 2017$ , δηλαδή η εξίσωση  $f(x) = 2017$  έχει ακριβώς μία ρίζα.

**Γ3.** Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στα  $[\alpha, \beta]$  και  $[\beta, \gamma]$  ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα  $(\alpha, \beta)$  και  $(\beta, \gamma)$  ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης τιμής στα  $[\alpha, \beta]$  και  $[\beta, \gamma]$  έχουμε ότι:

Υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha}$$

Και υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$  τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\gamma - \beta} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta}{\gamma - \beta}$$

Ακόμα  $f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  άρα η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$  και επομένως η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, για  $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta}{\gamma - \beta} \xrightarrow{\gamma - \beta > 0} \beta - \alpha > 0$$

$$(\gamma - \beta) \cdot (\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha) < (\beta - \alpha) \cdot (\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta) \Leftrightarrow (\gamma - \beta) \cdot \ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} < (\beta - \alpha) \cdot \ln \frac{\gamma^\gamma}{\beta^\beta}.$$

**Γ4.** Για  $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$  έχω  $\ln x < 0 \xrightarrow{x > 0} x \ln x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$ .

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^1 |f(x)| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (x \cdot \ln x) dx =$$

$$\left[ \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left( \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)' \right) dx = \frac{1}{2e^2} \cdot (-1) - 0 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left( \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left( \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2e^2} - \left[ \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{e}}^1 = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4e^2}.$$

#### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Αφού  $x \neq -1$ , έχουμε ότι  $f'(x) = \frac{x \cdot e^{x+1}}{(x+1)^2} = \frac{x \cdot e^{x+1} + e^{x+1} - e^{x+1}}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{e^{x+1} \cdot (x+1) - e^{x+1}}{(x+1)^2}$$

Επομένως,  $f'(x) = \left( \frac{e^{x+1}}{x+1} \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1} + c \xrightarrow[\substack{x=0 \\ f(0)=e}]{} f(0) = \frac{e^{0+1}}{0+1} + c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e = e + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα, } f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1} \text{ με } x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

**Δ2.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = \frac{x \cdot e^{x+1}}{(x+1)^2} > 0$  για  $x > 0$  και είναι

συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

άρα και «1-1». Επομένως  $f(g(x)) = \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow f(g(x)) = f(1) \Leftrightarrow g(x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3 = 0. \text{ Θεωρούμε συνάρτηση } \varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$$

όπου  $\varphi'(x) = 6x^2 - 6x = 6x \cdot (x - 1)$  και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -3, \text{ ενώ } \varphi(1) = -4. \text{ Ακόμα } \varphi'(x) < 0$$

στο  $(0, 1)$  και συνεχής ως πολυωνυμική άρα  $\varphi$  είναι

γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$ , ενώ  $\varphi'(x) > 0$  στο

$(1, +\infty)$  και  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[1, +\infty)$  ως

πολυωνυμική, άρα η συνάρτηση  $\varphi$  είναι γνησίως

αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ . Η συνάρτηση παρουσιάζει

τοπικό ελάχιστο για  $x = 1$ , το  $\varphi(1) = -4$ . Τέλος  $0 \in (\varphi([1, +\infty))) = [-4, +\infty)$ , όπου

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3) = +\infty \text{ και η συνάρτηση } \varphi \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ . Άρα η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, +\infty)$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
$\varphi(x)$		Γν. φθίνουσα	Γν. αύξουσα

**Δ3.** α) Έχουμε ότι  $\int_1^2 (x+1)^2 \cdot f'(x) dx = \int_1^2 (x+1)^2 \cdot \frac{x \cdot e^{x+1}}{(x+1)^2} dx =$

$$= \int_1^2 (x \cdot e^{x+1}) dx = \left[ x \cdot e^{x+1} \right]_1^2 - \int_1^2 (e^{x+1}) dx = 2e^3 - e^2 - \left[ e^{x+1} \right]_1^2 =$$

$$= 2e^3 - e^2 - e^3 + e^2 = e^3.$$

Επομένως  $L(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$  με  $D_L = (0, 1]$  και  $L'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$

για κάθε  $x \in (0, 1)$  και  $L(x)$  συνεχής στο  $(0, 1]$  ως διαφορά συνεχώς συναρτήσεων, άρα

$L(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1]$  και επομένως  $L(x)$  είναι «1-1» άρα

αντιστρέφεται.

β) Έχουμε ότι  $D_{L^{-1}} = L((0, 1]) \stackrel{L \text{ γν. αύξουσα}}{=} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} L(x), L(1) \right]$  με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \sqrt{1-x}) = -\infty \text{ και } L(1) = \ln 1 - 0 = 0.$$

Άρα,  $D_{L^{-1}} = (-\infty, 0]$ .

Δ4. Έχουμε ότι  $0 < L^{-1}(x) \leq 1 \xrightarrow{x^2 > 0} 0 < x^2 \cdot L^{-1}(x) \leq x^2$ , όπου  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot L^{-1}(x)) = 0$ .

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: *Ευθύμης Κασιμπράς*  
Μαθηματικός