

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο,

$$[\alpha, \beta] \text{ τότε να αποδείξετε ότι } \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

A3. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

δ) Κάθε συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημό της, σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi(x-1))}{\pi} - (\alpha x^2 - 1)$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(2-x)}{x-1} = -12$

B1. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = -4$ και $\alpha = 2$.

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

B3. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\pi(x-1)) \leq 2\pi x^2 - 4\pi x + 2\pi + 1$ $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\frac{2e^{f(x)}}{f'(x)} = e^{f^2(x)} + 1$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f'(x) \neq 0$.

- Γ1.** Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .
- Γ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- Γ3.** Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.
- Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η παράγωγος f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε ακόμα την παραγωγίσιμη συνάρτηση g η οποία είναι τέτοια ώστε $g'(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$
και την συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - g(\alpha)$ με $x \in (1, +\infty)$ και $\alpha > 1$.

Να αποδείξετε ότι:

- Δ1.** Είναι $f'(1) = 1$ καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.
- Δ2.** Η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα και στην συνέχεια να λύσετε στο \mathbb{R} την ανίσωση $\Phi(8x^2 + 6) - \Phi(8x^2 + 5) > \Phi(2x^4 + 6) - \Phi(2x^4 + 5)$, όπου η συνάρτηση Φ είναι η αρχική της συνάρτησης φ .
- Δ3.** Η συνάρτηση g είναι κυρτή και ότι η εξίσωση $(\alpha - 1)\varphi(x) = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$ έχει ακριβώς μία λύση για $x > 1$.

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: *Ευθύμης Κασιμπράς*
Μαθηματικός