

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ (2)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 18 ΜΑΪΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 4

A2. i. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

♦ Η f είναι συνεχής στο Δ και

♦ $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

ii. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Να χαρακτηρίσετε την επόμενη πρόταση ως Ψευδή ή Αληθή:

(Μονάδες 1)

«Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ».

Αν η πρόταση είναι αληθής να το αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση f που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη.

β) Αν $a > 1$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

γ) Αν f είναι μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta], \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

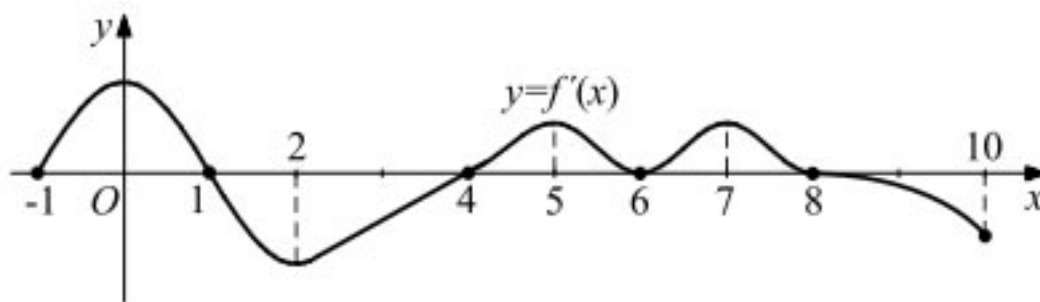
δ) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

ε) Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ ($\beta > \alpha$) εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c .

(Μονάδες $5 \times 2 = 10$)

ΘΕΜΑ Β

B1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Να προσδιορίσετε:

- i. τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

- ii. τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή και κοίλη.

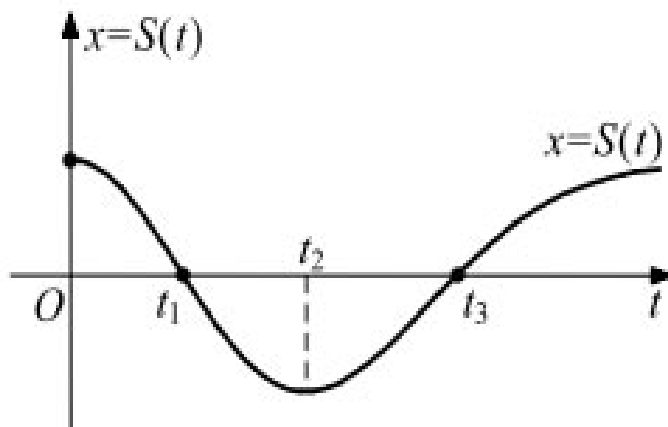
Μονάδες 5

- iii. τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής.

Μονάδες 5

Σε όλα τα ερωτήματα να *δικαιολογήσετε* τις απαντήσεις σας.

B2. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x=S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε ένα άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3 , να βρείτε:



- i. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ii. Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Μονάδες 5

Σε όλα τα ερωτήματα να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

$$f(e^{f(x)}) = \ln(x+4), \text{ για κάθε } x > -4 \text{ και}$$

$$(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln(x+4)+2), \text{ για κάθε } x > \frac{1}{e^2} - 4$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(x+2), x > -2$$

και να δώσετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f \circ f)(x) = f(e^{-x} + 2)$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(e^2 - 2, e^3 - 2)$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε x_1, x_2 στο $(-2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$,

ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x - 2e^{x-1}, \quad x > 0$$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) = \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt$$

έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{με } x > 0,$$

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = 1$.

Μονάδες 5

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$, $x > 0$

Αν η ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στα σημεία A_λ , B_λ αντίστοιχα, να βρείτε:

i. Την ελάχιστη τιμή των αποστάσεων $(A_\lambda B_\lambda)$.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ii. Τα όρια:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1} \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda^2 + 1},$$

όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $OA_\lambda B_\lambda$ και O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

- 1. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια:

Ομάδα Μαθηματικού Περιηγητή