

**ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

**Μονάδες 8**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle.

**Μονάδες 4**

**A3.** Αν δυο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$ ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δυο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς το φανταστικό άξονα.

**(μονάδες 2)**

**β)** Αν  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια συνάρτηση 1-1, τότε :

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$

**(μονάδες 2)**

**γ)** Έστω  $f$  συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**(μονάδες 2)**

- δ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο της ίδιας συνάρτησης.  
(μονάδες 2)
- ε) Αν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$  και η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε  $f''(x_0) = 0$ .  
(μονάδες 2)
- Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται ότι οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$z = 1 - \frac{1}{z}.$$

- B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.

**Μονάδες 5**

- B2.** Αν  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ , όπου  $z_3 = -1$ , είναι ισόπλευρο και εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο.

**Μονάδες 6**

- B3.** Αν  $u_1 = 2(z_1 z_2 - i)$ ,  $u_2 = 2(z_1 z_2 + i)$  και  $w$  οι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει:  $|w - 2| = 2$  (1), τότε να αποδείξετε ότι:

$$|w - u_1|^2 + |w^2 + u_2^2 - 2wu_2| = 16.$$

**Μονάδες 7**

- B4.** Αν  $w_1, w_2, w_3, w_4$  είναι τέσσερις από τους μιγαδικούς  $w$  που ικανοποιούν τη σχέση (1) του ερωτήματος B3, τότε να αποδείξετε ότι

$$\left| \frac{1}{w_1 - 2} + \frac{1}{w_2 - 2} + \frac{1}{w_3 - 2} + \frac{1}{w_4 - 2} \right| = \left| \frac{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}{4} - 2 \right|$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Αν:

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)+1}{x} = 1$  και

•  $f(x) = \begin{cases} -f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} & , \text{ αν } x > 0 \\ -1 + \int_0^1 \frac{f(xt)}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{x^2}}} dt, & \text{ αν } x < 0 \end{cases}$

Τότε :

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

α)  $f(0) = -1$  (μονάδες 1) και  $f'(0) = 1$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 5**

β) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} + f(x) = 0.$$

**Μονάδες 3**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x - \sqrt{x^2+1}}$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$  (μονάδες 4) και  $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (μονάδες 1).

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να μελετήσετε την παράγωγο  $f'$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της  $f'$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq 2|\alpha - \beta|$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $g$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :

- $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ .
- Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $g(x) \geq 0$ .

Θεωρούμε επίσης την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\int_2^{f(x)} \frac{1}{t-1} dt = x - 2 + g(x).$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) > 1$ .

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(2) = 2$  (μονάδες 2) και να βρείτε την ευθεία που εφάπτεται στη  $C_f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι, αν η  $f$  είναι κυρτή (κοίλα άνω), τότε για κάθε  $a > 2$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (2, a)$  για το οποίο ισχύει:

$$\int_a^{x_0} f(t) dt = x_0 - f(x_0)$$

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Αν  $g(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = 1 + e^{x-2}$ .

**Μονάδες 5**

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x) = \sin x \cdot (f(x+2) - 1),$$

τις ευθείες  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$  και τον άξονα των  $x$ .

**Μονάδες 4**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1:30 ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ**