ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 235

Α2. Θεωρία σελ. 246

Α3. Θεωρία σελ. 241

Α4. Λ, Σ, Σ, Λ, Σ.

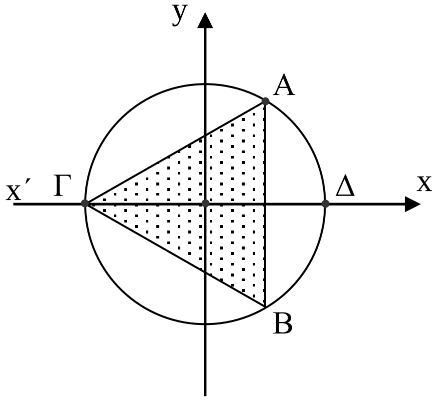
ΘΕΜΑ Β

Β1. $z=1-\dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ με $|z_1|=|z_2|=1$.

Β2. Είναι $(AB)=|z_1-z_2|=\cdots=\sqrt{3}$,

$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=\cdots=\sqrt{3}$

$(\Gamma A)=|z_3-z_1|=\cdots=\sqrt{3}$.



Β3. Είναι $u_1=2(z_1z_2-i)=2(1-i)$ και

$u_2=2(z_1z_2+i)=\cdots=2(1+i)$.

Τότε :

$\left|(w-u_1)^2\right|+\left|w^2+u_2^2-2wu_2\right|=|w-u_1|^2+|w-u_2|^2=$

$=(w-u_1)(\bar{w}-\bar{u}_1)+(w-u_2)(\bar{w}-\bar{u}_2)=$

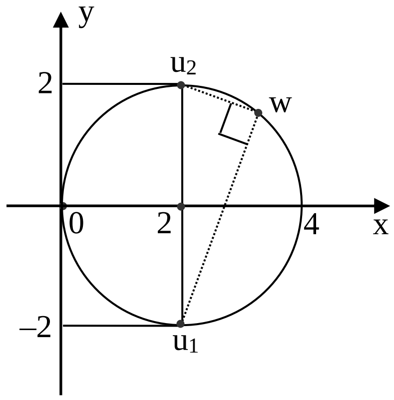
$=2w\bar{w}-w\left(\overline{u_1+u_2}\right)-\bar{w}(u_1+u_2)=$

$=2w\bar{w}-4w-4\bar{w}+16=2(w\bar{w}-2w-2\bar{w})+16=16$

γιατί :

$|w-2|^2=4 \Leftrightarrow (w-2)(\bar{w}-2)=4 \Leftrightarrow w\bar{w}-2w-2\bar{w}=0$

<u>β τρόπος.</u> Εφαρμογή Πυθαγορείου θεωρήματος (βλέπε σχήμα).



Β4. Είναι

$|w_1-2|=2 \Leftrightarrow (w_1-2)\left(\overline{w_1-2}\right)=4 \Leftrightarrow (w_1-2)(\bar{w}_1-2)=4 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{w}_1-2}{4}=\dfrac{1}{w_1-2}$.

Όμοια $\dfrac{\bar{w}_2-2}{4}=\dfrac{1}{w_2-2}$, $\dfrac{\bar{w}_3-2}{4}=\dfrac{1}{w_3-2}$, $\dfrac{\bar{w}_4-2}{4}=\dfrac{1}{w_4-2}$.

Άρα:

$$\left|\frac{1}{w_1-2}+\frac{1}{w_2-2}+\frac{1}{w_3-2}+\frac{1}{w_4-2}\right|=\left|\frac{\bar{w}_1-2}{4}+\frac{\bar{w}_2-2}{4}+\frac{\bar{w}_3-2}{4}+\frac{\bar{w}_4-2}{4}\right|=$$

$$\cdot\left|\frac{\bar{w}_1+\bar{w}_2+\bar{w}_3+\bar{w}_4-8}{4}\right|==\left|\frac{\overline{w_1+w_2+w_3+w_4}}{4}-2\right|$$

$$\left|\overline{\frac{w_1+w_2+w_3+w_4}{4}-2}\right|=\left|\frac{w_1+w_2+w_3+w_4}{4}-2\right|$$

ΘΕΜΑ Γ

Λύση

- Μετατροπή του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{\sqrt{t^2+\frac{1}{x^2}}}dt$.

θέτουμε u=xt, οπότε:

$u = xt \Leftrightarrow t = \frac{u}{x}$, οπότε $dt = \frac{1}{x}du$. Για $t = 0$, $u = 0$ και για $t = 1$, $u = x$.

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{\sqrt{\frac{(tx)^2+1}{x^2}}}dx = \int_0^1 |x|\frac{f(xt)}{\sqrt{(xt)^2+1}}dx = -\int_0^x x\frac{f(u)}{\sqrt{u^2+1}}\cdot\frac{1}{x}du = -\int_0^x \frac{f(u)}{\sqrt{u^2+1}}du$.

Άρα : $f(x) = -1 - \displaystyle\int_0^x \frac{f(u)}{\sqrt{u^2+1}}du$, για $x < 0$.

Γ1.

α)

Υπολογισμός του f(0).

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)+1}{x} = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+1}{x}\cdot x\right) = 1\cdot 0 = 0, \text{ άρα } \lim_{x\to 0^+}\left(f(x)+1\right) = 1, \text{ οπότε}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$. Επομένως $f(0) = -1$, αφού f συνεχής στο 0.

β τρόπος Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)+1}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$, f(x)=xg(x)-1 $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(xg(x)-1\right) = -1$. Επομένως $f(0) = -1$, αφού f συνεχής στο 0.

Υπολογισμός του f ΄(0).

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+1}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\int_0^x \frac{f(u)}{\sqrt{u^2+1}}\cdot du}{x} \overset{(0/0)}{=} -\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\int_0^x \frac{f(u)}{\sqrt{u^2+1}}\cdot du\right)'}{(x)'} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} = -f(0) = 1$$

Άρα $f'(0) = 1$

(β)

Για $x \in (0,+\infty)$ έχουμε $f(x) = -f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) + f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} = 0$.

Για $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε $f(x) = -1 - \displaystyle\int_0^x \frac{f(u)}{\sqrt{u^2+1}}\cdot du$. Άρα

$f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x)\sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$.

Η σχέση $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$ για x=0 γίνεται $f'(0)\cdot\sqrt{0^2+1}+f(0)=0$ η οποία ισχύει.

Άρα: $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $$g'(x)=\cdots=\left[\frac{f(x)}{x-\sqrt{x^2+1}}\right]'=\frac{f'(x)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)-f(x)\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\left(f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)\right)+x\frac{f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^2}=0$$

Επομένως η g είναι σταθερή, δηλ. $\frac{f(x)}{x-\sqrt{x^2+1}}=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$: $\frac{f(0)}{-1}=c \Leftrightarrow c=1$. Τότε $f(x)=x-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Γ3. $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\left(f'(x)\right)'=f''(x)=-\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}<0$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή είναι και συνεχής θα ισχύει :

$$f'(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to+\infty}f'(x),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right).$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=2.$$

Επομένως $f'(\mathbb{R})=(0,2)$. Η $y=0$ ασύμπτωτη στο $+\infty$ και η $y=2$ ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Γ4. (α). Αν α = β, τότε η $|f(\alpha)-f(\beta)|\le 2|\alpha-\beta|$ προφανώς ισχύει.

(β). Αν α < β, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. στο [α,β] θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\xi)$, οπότε $\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|=|f'(\xi)|=\left|1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}\right|\le 1+\left|\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}\right|=$

$=1+\frac{\sqrt{\xi^2}}{\sqrt{\xi^2+1}}\le 1+\frac{\sqrt{\xi^2+1}}{\sqrt{\xi^2+1}}=2$. Άρα $\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|\le 2 \Leftrightarrow |f(\alpha)-f(\beta)|\le 2|\alpha-\beta|$.

β τρόπος. $0<f'(\xi)<2 \Leftrightarrow 0<\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<2$, άρα $\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|<2$, κ.λ.π.

ΘΕΜΑ Δ

Είναι $\lim_{x\to2}g(x)=0$ και επειδή g συνεχής στο 2 θα έχουμε $\lim_{x\to2}g(x)=g(2)$. Άρα $g(2)=0$.

Επίσης $g(x)\ge 0$ άρα $g(x)\ge g(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε από Θ. Fermat $g'(2)=0$.

Δ1. Η συνάρτηση $\varphi(t)=\frac{1}{t-1}$ είναι συνεχής και ορίζεται για κάθε $t\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Επειδή $2 \in (1,+\infty)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $f(x) \in (1,+\infty)$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει f(x)>1.

Δ2. Έχουμε: $t > 1 \Leftrightarrow t-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{t-1} > 0$.

Είναι $\displaystyle\int_2^{f(x)} \frac{1}{t-1}dt = \left[\ln(t-1)\right]_2^{f(x)} = \ln\left(f(x)-1\right)$, οπότε

$\displaystyle\int_2^{f(x)} \frac{1}{t-1}dt = x-2+g(x) \Leftrightarrow \ln\left(f(x)-1\right) = x-2+g(x) \Leftrightarrow f(x) = 1+e^{x-2+g(x)}$,

οπότε $f(2) = 1+e^{2-2+g(2)} = 1+e^0 = 2$.

β τρόπος υπολογισμού της τιμής f(2).

Από τη σχέση $\displaystyle\int_2^{f(x)} \frac{1}{t-1}dt = x-2+g(x)$ για $x=2$ παίρνουμε $\displaystyle\int_2^{f(2)} \frac{1}{t-1}dt = 0$.

Επειδή $\dfrac{1}{t-1} > 0$, αν f(2)>2, τότε $\displaystyle\int_2^{f(2)} \frac{1}{t-1}dt > 0$ άτοπο.

Αν f(2)<2, τότε πάλι οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα $f(2)=2$

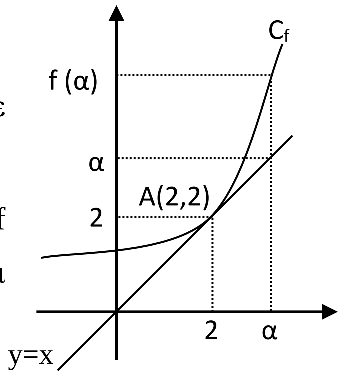
Εξίσωση εφαπτομένης στο Α(2,2): $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

Από τη σχέση $f'(x) = \left(f(x)-1\right)\left(1+g'(x)\right)$ για x=2 παίρνουμε $f'(2)=\left(f(2)-1\right)\left(1+g'(2)\right)$. Άρα $f'(2)=1$. Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(2,f(2)\right)$, δηλ. στο (2,2) είναι η $y=x$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=\int_\alpha^x f(t)dt - x + f(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι $H(2)=\int_\alpha^2 f(t)dt - 2 + f(2) = -\int_2^\alpha f(t)dt < 0$, γιατί έχουμε $f(t)>1$.

Επίσης $H(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f(t)dt - \alpha + f(\alpha) = f(\alpha)-\alpha > 0$, αφού η f στρέφει τα κοίλα άνω. Επομένως από το Θ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (2,\alpha)$ τέτοιο ώστε $H(x_0)=0$.



Δ4. (α). Για $g(x)=0$ η (2) δίνει $f(x)=1+e^{x-2}$.

(β). Επομένως $h(x)=\sigma\upsilon\nu x \cdot e^x$.

Είναι $h(x) \le 0$ στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, οπότε, αν Ε το ζητούμενο εμβαδόν, τότε:

$$E = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x dx$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε ότι $E=\dfrac{e^{\pi}+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$