ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ «Ο ΘΑΛΗΣ»

Γ΄ Τάξη Λυκείου
Θέματα: 2006-2017

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

www.pe03.gr

Δημήτριος Σπαθάρας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
Φθιώτιδας και Ευρυτανίας
www.pe03.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x+y))=x-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)+f(-x)$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3^{x+1}-x\cdot 3^{x}-4x-1=0.$$

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2 \; και \; \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z_1|^2}{συν^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{ημ^2\theta}\geq |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα **ΚΒ· ΚΓ**, **ΛΒ· ΛΓ** και **ΜΒ· ΜΓ** είναι άνισα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στα σημεία Α και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(f(x) - f(y)\right) = f\left(f(x)\right) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2\cdot \mathrm{AM} \ , \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2\cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο .

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x(x-2)+11x-10y=2015$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\big(x-f(y)\big)-f\big(y-f(x)\big)=2f\big(f(x)-f(y)\big),$$

για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x-f(x))=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\alpha 00\cdots 00\alpha}$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά.

Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33".

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο .

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω $Α_1, Β_1, Γ_1$ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(Α_1, \frac{R}{2})$, $C_2(Β_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(Γ_1, \frac{R}{2})$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Ν) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα $Α_2, Β_2, Γ_2$ των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$, $Γ_1Γ_2$ και ΟΝ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση
$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$. Το ύψος του $\mathrm{A\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{B\Delta Z}$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E. Αν η ευθεία $\mathrm{E\Delta}$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ στο K και η ευθεία ZK τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\mathrm{B}\Lambda$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.

β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$ και $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B, αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$, $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ και ισχύει ότι $\mathrm{r}_1<\mathrm{r}_2$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{MA}<\mathrm{MB}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση
$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, , αν το σύστημα
$$\left\{\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda, \qquad 2x-y=-\lambda\right\} \qquad (\Sigma)$$
έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3
Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\le 8\cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Τ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α, Ι, Λ, Μ και Α, Ι, Κ, Ν, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Αν η ΑΔ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη κορυφή Α, τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$2x^2-5x-2x\sqrt{x^2-5x}=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Πρόβλημα 3
Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση
$$4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$
έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{l} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{array}\right\}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $\mathrm{A\Gamma}$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $\mathrm{B\Delta H\Theta}$, $\mathrm{B\Delta EK}$ και $\Delta\mathrm{Z\Theta K}$ είναι εγγράψιμα.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma,-\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta,-\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha+\beta=\gamma+\delta$

(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}\,.$$

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη-αρνητικούς ακεραίους x,y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p,q πρώτοι αριθμοί.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ και έστω D,E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και τα σημεία της Α, Β και Γ με τετμημένες α, β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1) = 1,\ P(2) = 4, P(3) = 9,\ P(4) = 16$.

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $A = 14^7 + 14^2 + 1$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$f(a)=0 \text{ και } f\left(f(x)\right)=xf(x)+a, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Πρόβλημα 2
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$x^7+x^6+x^5+1=0 \ .$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A}=36^o$. Ο κύκλος $C_1(\Gamma,\Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η ΔΓ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 4
Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!