ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελίδα 99 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Ψευδής

β) Η g(x) είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη,

σελίδα 35 σχολικού βιβλίου αντιπαράδειγμα

Α3. Σελίδα 216 σχολικού βιβλίου

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

x		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

τ.μέγιστο

Για $x \in (-\infty, -2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Για $x \in [-2, 0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Για $x \in (0, +\infty)$ η f γνησίως αύξουσα

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση χ=-2 το f(-2)=-3

Β2.

$$f''(x) = \frac{-8 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-24}{x^4} < 0$$

Η f είναι κοίλη στο $\Re - \{0\}$

Δεν έχει σημεία καμπής.

B3.

Εξετάζω για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο x=0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-\frac{4}{x^2}) = -\infty$$

Οπότε η Cf έχει κατακόρυφη ασύπτωτη στο x=0

Εξετάζω για πλάγιες στο $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty}(1-\frac{4}{x^3}) = 1$$

Άρα λ=1

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to +\infty}(x-\frac{4}{x^2}-x) = \lim_{x\to +\infty}(-\frac{4}{x^2}) = 0 = \beta$$

Οπότε η y=x πλάγια στο $+\infty$

Εξετάζω για πλάγιες στο $-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to -\infty}(1-\frac{4}{x^3}) = 1$$

Άρα λ=1

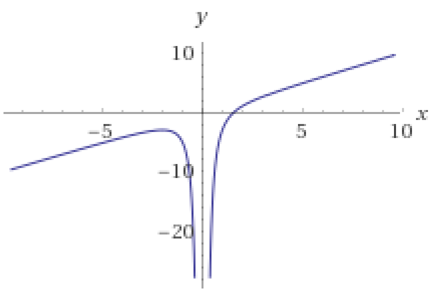
$$\lim_{x\to -\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to -\infty}(x-\frac{4}{x^2}-x) = \lim_{x\to -\infty}(-\frac{4}{x^2}) = 0 = \beta$$

Οπότε η y=x πλάγια στο $-\infty$

Β4.

x		-2		0		$+\infty$
f΄(x)	+	0	−	‖	+	
f΄΄(x)	−		−	‖	−	
	↗		↘	‖	↗	

τ.μέγιστο



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\frac{x}{4}$ είναι $E_1(x)=\frac{x^2}{16}$

Ο κύκλος έχει περίμετρο L=8-x$\Leftrightarrow$ 2πρ=8-x$\Leftrightarrow$ $\rho=\frac{8-x}{2\pi}$

Το εμβαδόν του κύκλου θα είναι $E_2(x)=\pi\rho^2=\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$

Οπότε E(x)= $E_1(x)+E_2(x)=\frac{(\pi+4)\,x^2-64x+256}{16\pi}$.

Γ2.

$$E'(x)=\frac{2(\pi+4)\cdot x-64}{16\pi}$$

$$E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{32}{\pi+4}$$

x	0		$\frac{32}{(\pi+4)}$		8
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ο.Ε		

Το εμβαδόν ελαχιστοποιείται όταν $x=\frac{32}{\pi+4}$ τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}=\frac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου είναι $2\rho=\frac{8}{\pi+4}$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική ριζά.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)=\frac{16}{\pi}>5$ γιατί $16>5\pi \Leftrightarrow \frac{16}{5}>\pi \Leftrightarrow 3,2>\pi$
- $\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{16}{\pi}-\frac{64}{\pi(\pi+4)}$
- $\lim\limits_{x\to 8} E(x)=4$

Άρα $5\in \mathrm{E}\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)\right)=\left[\frac{16}{\pi}-\frac{64}{\pi(\pi+4)},\frac{16}{\pi}\right)$ και $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$ επομένως η εξίσωση $E(x)=5$ έχει ρίζα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$.

Το $5\notin \mathrm{E}\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\right)=\left[\frac{16}{\pi}-\frac{64}{\pi(\pi+4)},4\right)$.

Επομένως η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική ρίζα.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. $f'(x)=2e^{x-a}-2x \quad , \; a>1$

$f''(x)=2e^{x-a}-2$

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{x-a}\geq 2 \Leftrightarrow e^{x-a}\geq 1 \Leftrightarrow x-a\geq 0 \Leftrightarrow x\geq a$

Η f''(x)<0 για $x\in(-\infty,a)$ άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω

Η f''(x)>0 για $x\in(\alpha,+\infty)$ άρα η f στρέφει τα κοίλα πάνω

Η f παρουσιάζει σ.κ. για x=α, με $f(a)=2-a^2$

Δ2.

Η f''(x)<0 για $x\in(-\infty,a)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f''(x)>0 για $x\in(\alpha,+\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=α με $f'(a)=2-2a<0$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}(2e^{x-a}-x^2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(2e^{x-a}-2x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Επομένως $0\in f'((-\infty,a])=[2-2a,+\infty)$ και f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,a]$

Άρα η $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1\in(-\infty,a)$.

και $0\in f'([\alpha,+\infty))=[2-2\alpha,+\infty)$ και f γν. αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$

άρα η $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_2\in(a,+\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3.

Δ4.

$$f(x)=2e^{x-2}-x^2$$
$$f'(x)=2e^{x-2}-2x$$

Η εφαπτομένη στο Σ.Κ. x=2 είναι ε: $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$$y-(-2)=(-2)(x-2)$$
$$y=-2x+2$$

Για $x>2$

$$f(x)>-2x+2$$

$$f(x)\sqrt{x-2}>(-2x+2)\sqrt{x-2}$$

$$f(x)\sqrt{x-2} > -2(x-2)\sqrt{x-2}$$

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -2\int_2^3 (x-2)\sqrt{x-2}dx \quad (1)$$

$$\int_2^3 (x-2)\sqrt{x-2}dx = \int_2^3 (x-2)^{3/2}dx = \left[\frac{(x-3)^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_2^3 = \frac{2}{5} \Rightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -2\frac{2}{5} = -\frac{4}{5} = -\frac{12}{15} > -\frac{32}{15}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ	ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ	ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ
ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ	ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ	ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ
ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡ	ΛΕΥΚΟΚΙΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΠΙΔΑ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ	ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ