ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ 1ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α2. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

Α3. Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α4.

1. Λ **2. Λ** **3. Σ** **4. Σ** **5. Σ**

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{x}(ημx+συνx)$

Στο (−π, π) είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}(ημx+συνx)=0 \Leftrightarrow ημx=-συνx$

(Τα ημx και συνx δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, επομένως για $x\neq -\frac{π}{2},\frac{π}{2}$)

$ημx=-συνx \Leftrightarrow εφx=-1 \Leftrightarrow x=κπ-\frac{π}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{π}{4}$ ή $x=\frac{3π}{4}$

Η f' είναι συνεχής στο $[-π,π]$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών της και επειδή $f'\left(-\frac{π}{2}\right)=-e^{-\frac{π}{2}}<0$, $f'(0)=1>0$, $f'(-π)=-e^{-π}<0$.

Επομένως η f' είναι θετική στο διάστημα $\left[-\frac{π}{4},\frac{3π}{4}\right]$ και αρνητική στα $\left[-π,-\frac{π}{4}\right]$ και $\left[\frac{3π}{4},π\right]$.

Τελικά έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-π$		$-\frac{π}{4}$		$\frac{3π}{4}$		$π$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	max	↘	min	↗	max	↘	min

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $\left[-π,-\frac{π}{4}\right]$, $\left[\frac{3π}{4},π\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{π}{4},\frac{3π}{4}\right]$

Έχει τοπικά μέγιστα στα σημεία $(-\pi,0)$ και $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$, επομένως έχει ολικό μέγιστο στο $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$. Επίσης τοπικά ελάχιστα στα σημεία $\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$ και $(\pi,0)$, επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$.

Β2. Η εφαπτομένη στο (0, 0) : $f(0)=0,\ f'(0)=1$

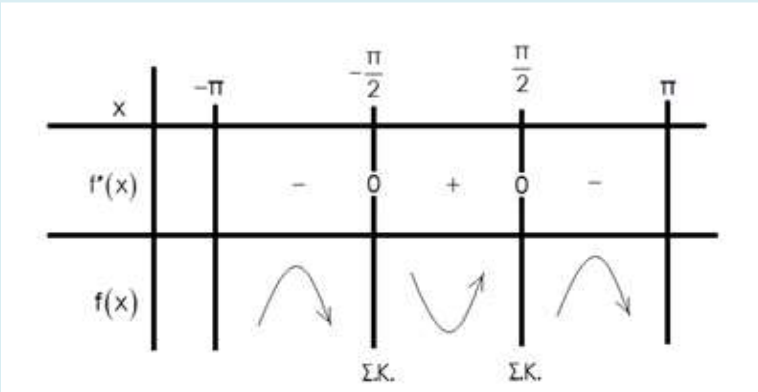
Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y=x$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=2e^{x}\sigma\upsilon\nu x$.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{\pi}{2} \text{ και}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Πίνακας



Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στα $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Έχει σημεία καμπής τα $\left(-\frac{\pi}{2},-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

B4. Στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ η f είναι κυρτή συνεπώς θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της y = x.
Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x-x\right)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\,dx=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(e^x\right)'\eta\mu x\right)dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx=$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-E$$

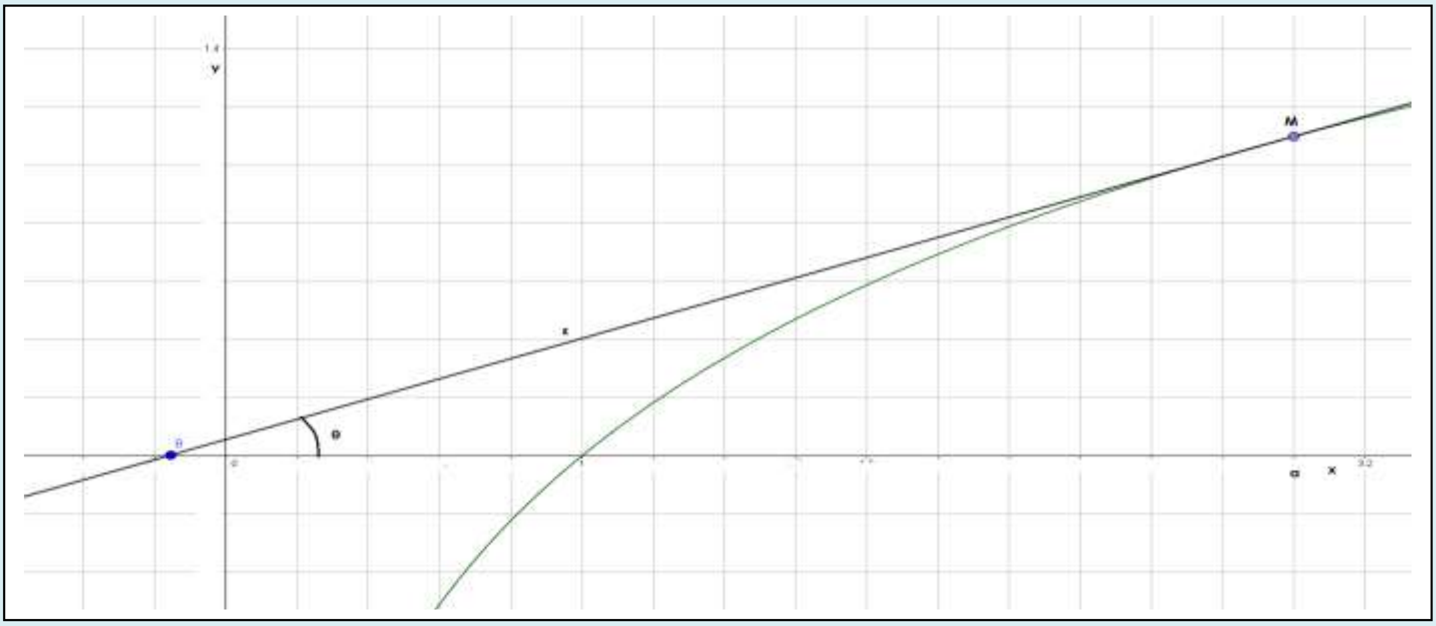
Άρα

$$E=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-E\Leftrightarrow E=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{1}{x}$.
Η εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση:

$$y-\ell n\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\alpha}x+\ell n\alpha-1.$$



Γ2i) Είναι : $\varepsilon\varphi\theta(t)=f'(\alpha(t))=\dfrac{1}{\alpha(t)}$ οπότε

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(\frac{1}{\alpha(t)}\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-\frac{1}{\alpha^2(t)}\alpha'(t)\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t)=-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\alpha^2(t)}\alpha'(t)$$

Για $t=t_o$ έχουμε $\alpha(t_o)=\sqrt{3}$, $\alpha'(t_o)=2$ και $\varepsilon\varphi\theta(t_o)=\dfrac{1}{\alpha(t_o)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Επειδή $0\le\theta(t)<\pi$ θα είναι $\theta(t_o)=\dfrac{\pi}{6}$, επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta(t_o)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Τελικά $\theta'(t_o)=-\dfrac{\frac{3}{4}}{3}\cdot 2=-\dfrac{1}{2}\text{rad/s}$.

Γ2ii) Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Θα πρέπει : $0=\dfrac{1}{a}\cdot 0+\ell n a-1\Leftrightarrow \ell n a=1\Leftrightarrow a=e$

Επομένως είναι ε: $y=\dfrac{1}{e}x+\ell n e-1\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{e}x$

Για $t = t_1$ έχουμε $\alpha(t_1) = e$, $\alpha'(t_1) = 2$ και $\varepsilon\varphi\theta(t_1) = \frac{1}{e}$.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_1) = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_1)} = \frac{1}{1+e^2}$.

Τελικά $\theta'(t_1) = -\frac{\frac{1}{1+e^2}}{e^2} \cdot 2 = -\frac{2}{e^2(1+e^2)} rad/s$.

Θέμα Δ

Δ1. Στα διαστήματα [0,2] , [2, 4], [4, 6] η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα (0,2) , (2, 4), (4, 6).
Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ θα υπάρχουν :

- $\xi_1 \in (0\ ,\ 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{f(2)}{2}$.
- $\xi_2 \in (2\ ,\ 4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(4)-f(2)}{2}$.
- $\xi_3 \in (4\ ,\ 6)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_3) = \frac{f(6)-f(4)}{2}$.

Επειδή $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ και f κοίλη άρα f' γνησίως φθίνουσα θα είναι :

$$f'(\xi_1) > f'(\xi_2) > f'(\xi_3) \Leftrightarrow \frac{f(2)}{2} > \frac{f(4)-f(2)}{2} > \frac{f(6)-f(4)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(2) > f(4) - f(2) > f(6) - f(4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) > f(4) - f(2) \\ f(4) - f(2) > f(6) - f(4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(2) > f(4) \\ 2f(4) > f(6) + f(2) \end{cases} \overset{\text{Υπόθεση}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(2) > f(4) \\ 2f(4) > -f(4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(2) > f(4) \\ 3f(4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) > 0 \\ f(4) > 0 \end{cases}$$

Δ2. Επειδή $f(6) = -(f(2) + f(4))$ είναι $f(6) < 0$.

Από θεώρημα Bolzano στο [4 , 6] υπάρχει $\xi \in (4,6)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Δ3. Από θεώρημα Rolle στο [0, ξ] υπάρχει $x_o \in (0,\xi) \subseteq (0,6)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) = 0$.

Επίσης για :

$$x < x_o \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_o) = 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στο } [0, x_o]$$
$$x > x_o \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_o) = 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [x_o, 6]$$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x_o .

Δ4. Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της K(5, f(5)):

$$y - f(5) = f'(5)(x-5) \Leftrightarrow y = f'(5)(x-5) + f(5)$$

Επειδή η f είναι κοίλη θα ισχύει ότι η C_f βρίσκετε «κάτω» από την εφαπτομένη της στο K(5, f(5)) δηλαδή $f(x)\le y$ άρα:

$f(x)\le f'(5)(x-5)+f(5)\Leftrightarrow f(x)-f(5)\le f'(5)(x-5)+f(5)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Το ίσο ισχύει για x = 5 στο σημείο K)

Δ5. Από το Δ4 και επειδή η f δεν είναι σταθερή έχουμε

$$\int_4^6\left[f(x)-f(5)\right]dx<\int_4^6\left[f'(5)(x-5)+f(5)\right]dx\Leftrightarrow$$

$$\int_4^6 f(x)dx-f(5)\int_4^6 dx<f'(5)\int_4^6\left[(x-5)\right]dx+f(5)\int_4^6 dx\Leftrightarrow$$

$$0-2f(5)<f'(5)\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_4^6+2f(5)\Leftrightarrow$$

$$-4f(5)<f'(5)\left[\frac{36}{2}-30-\frac{16}{2}+20\right]_4^6\Leftrightarrow$$

$$-4f(5)<0\Leftrightarrow$$

$$f(5)>0$$