

1^ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

A1. Τι καλείται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ ;

(5 μονάδες)

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

(5 μονάδες)

A3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(5 μονάδες)

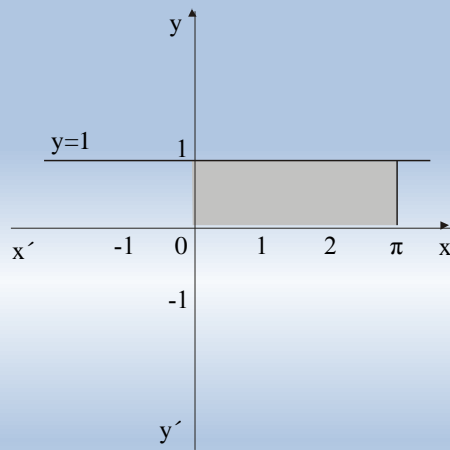
A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

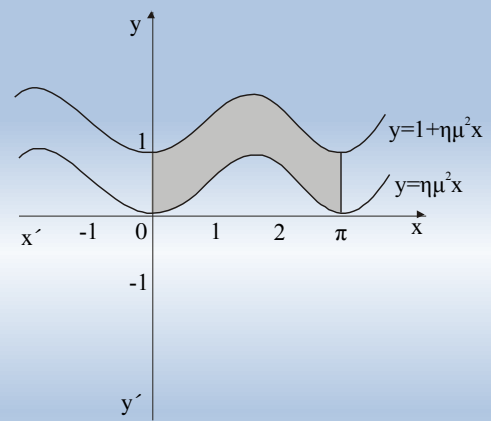
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ τότε πάντα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ έτσι ώστε:

$$f(x_1) = f(x_2).$$
3. Κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
4. Η συνάρτηση $f(x) = |x| + \sin^3 x + x^4 + 1$ δεν αντιστρέφεται.
5. Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 1 είναι ίσο με το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(5x 2 = 10 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$ με $x \in [-\pi, \pi]$.

B1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της (τοπικά και ολικά).

7 μονάδες

B2. Να βρεθεί η εφαπτομένη της στην αρχή των αξόνων.

4 μονάδες

B3. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

7 μονάδες

B4. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της διχοτόμου της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, της C_f και των ευθειών $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

7 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η καμπύλη $C: f(x) = \ln x$, με $x > 1$ και το σημείο της $M(a, \ln a)$.

Γ1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C στο σημείο της M .

8 μονάδες

Γ2) Με δεδομένο ότι η τετμημένη του σημείου M αυξάνεται με ρυθμό 2cm/s και $\theta(t)$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ϵ) με τον άξονα $x'x$, να βρείτε:

i) το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται η γωνία $\theta(t)$ τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του σημείου M είναι $\sqrt{3}$ cm

9 μονάδες

ii) Το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται η γωνία θ τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη (ϵ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

8 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κοίλη για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 0$
- $f(2) + f(4) + f(6) = 0$

- Δ1.** Να δειχθεί ότι ισχύουν: $f(2) > 0$ και $f(4) > 0$. 5 μονάδες
- Δ2.** Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (4, 6)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$. 5 μονάδες
- Δ3.** Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in (0, 6)$. 5 μονάδες
- Δ4.** Να δειχθεί ότι ισχύει $f(x) - f(5) \leq f'(5)(x - 5)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. 5 μονάδες
- Δ5.** Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_4^6 f(x) dx = 0$ τότε να δειχθεί ότι $f(5) > 0$ 5 μονάδες

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στις κόλλες να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ονοματεπώνυμο, ημερομηνία, τμήμα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στη κόλλες.
2. Στη φωτοτυπία δεν θα σημειώσετε τίποτα.
3. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.