Θανάση Π. Ξένου

Επιλεγμένα θέματα από τα Μαθηματικά για το διαγωνισμό του ΑΣΕΠ

- για το μάχιμο εκπαιδευτικό
- για το μαθητή με απαιτήσεις

- άλγεβρα
- ανάλυση
- στατιστική
- πιθανότητες
- ευκλείδεια γεωμετρία
- αναλυτική γεωμετρία

- ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής
- σχέδια μαθημάτων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Παράρτημα Α

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Θ. Ξένος

1. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x, τότε η τιμή της παράστασης $[x]+[-x]$ είναι:

- ❑ **α)** 0 ή -1,
- ❑ **β)** 0,
- ❑ **γ)** -1,
- ❑ **δ)** εξαρτάται από το x.

2. Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ το σύνολο $A \cup (B \cap A^c) \cup (\Gamma \cap A^c \cap B^c)$, όπου A^c, B^c τα συμπληρωματικά των A, B ως προς ένα σύνολο αναφοράς Ω, ισούται με το σύνολο:

- ❑ **α)** $A \cup B \cup \Gamma$,
- ❑ **β)** $A \cap B \cap \Gamma$,
- ❑ **γ)** $(A \cup B) \cap \Gamma$,
- ❑ **δ)** $(A - B) \cup (B - A) \cup \Gamma$.

3. Το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ είναι :

- ❑ **α)** n,
- ❑ **β)** $n+1$,
- ❑ **γ)** $2n$,
- ❑ **δ)** 2^n.

4. Το κλάσμα $\dfrac{29292929}{31313131}$:

- ❑ **α)** είναι ανάγωγο,
- ❑ **β)** ισούται με $\dfrac{29}{31}$,
- ❑ **γ)** έχει πεπερασμένου πλήθους δεκαδικά ψηφία,
- ❑ **δ)** δεν είναι ρητός αριθμός.

5. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ έχει:

- ❑ **α)** ελάχιστη τιμή -2,
- ❑ **β)** μέγιστη τιμή 2,
- ❑ **γ)** ελάχιστο $-\sqrt{2}$ και μέγιστο $\sqrt{2}$,
- ❑ **δ)** περίοδο $T=\pi$.

6. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν είναι περίοδος της συνάρτησης:

$f(x)=\eta\mu^4\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{x}{2}$;

- ❑ **α)** $\frac{\pi}{2}$,
- ❑ **β)** π,
- ❑ **γ)** 3π,
- ❑ **δ)** 2π.

7. Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, η συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια η στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$, απεικονίζει το σημείο $M(x,y)$ στο σημείο M' με συντεταγμένες:

- ❑ **α)** (y,x),
- ❑ **β)** $(-y,-x)$,
- ❑ **γ)** $(-y,x)$,
- ❑ **δ)** $(-x,y)$.

8. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο V και για κάθε $x\in$ V ισχύει $x+f(f(x))=0$. Τότε:

- ❑ **α)** Η f δεν είναι αντιστρέψιμη.
- ❑ **β)** Η f είναι γνησίως μονότονη.
- ❑ **γ)** Η f δεν είναι συνεχής.
- ❑ **δ)** Η f είναι συνεχής.

9. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο V και μια ευθεία ε τέμνει τη γραφική της παράσταση σε τρία σημεία. Ποιο από τα παρακάτω μπορούμε να ισχυρισθούμε με βεβαιότητα ότι συμβαίνει;

- ❑ **α)** Η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής.
- ❑ **β)** Η συνάρτηση f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.
- ❑ **γ)** Η συνάρτηση f'' έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
- ❑ **δ)** Η f έχει δύο τουλάχιστον τοπικά ακρότατα.

10. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Ποια από τις επόμενες προτάσεις δεν αληθεύει;

- ❑ **α)** Η f έχει μία τουλάχιστον αρχική στο Δ.
- ❑ **β)** Οποιαδήποτε αρχική της f στο Δ παίρνει τη μορφή $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ \alpha\in\Delta$.
- ❑ **γ)** Υπάρχουν αρχικές της f στο Δ που δεν γράφονται στη μορφή $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ \alpha\in\Delta$.
- ❑ **δ)** Η διαφορά δύο τιμών μιας αρχικής της f στο Δ είναι ίδια για όλες τις αρχικές της f στο Δ.

11. Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «μαθηματικά» είναι:

- ❑ **α)** $10!$,
- ❑ **β)** $\dfrac{10!}{2!\,3!}$,
- ❑ **γ)** $\dbinom{10}{7}$,
- ❑ **δ)** $\dfrac{10!}{7!}$.

12. Καθένας από τους παρακάτω αριθμούς παριστάνει το πλήθος των πλευρών κανονικού πολυγώνου. Σε ποια περίπτωση είναι δυνατή η κατασκευή του πολυγώνου με κανόνα και διαβήτη;

- ❑ **α)** 7,
- ❑ **β)** 17,
- ❑ **γ)** 9,
- ❑ **δ)** 18.

Απαντήσεις

1) α	**2)** α	**3)** δ	**4)** β
5) γ	**6)** α	**7)** α	**8)** γ
9) γ	**10)** β	**11)** β	**12)** β

9ο Σχέδιο

Κυρτότητα και σημεία καμπής συνάρτησης

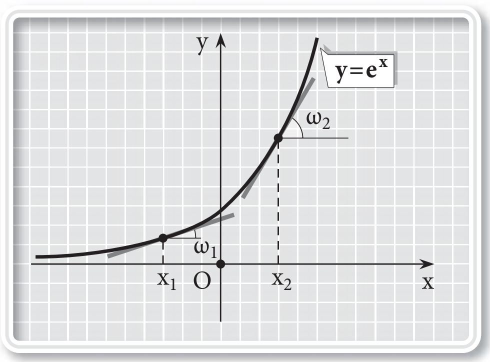
Θ. Ξένος

Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

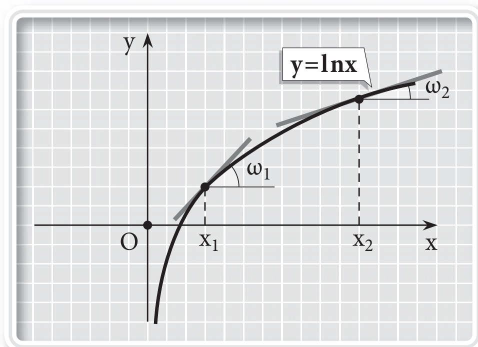
1 Η έννοια της κυρτότητας

- Οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσες, αλλά οι γραφικές τους παραστάσεις «ανεβαίνουν» με διαφορετικό τρόπο. Προτείνουμε στους μαθητές μας να μελετήσουν την κλίση καθεμιάς σε δύο διαφορετικά σημεία.

α)



β)



Για την $f(x)=e^x$ παρατηρούμε ότι για $x_1<x_2$ ισχύει $\omega_1<\omega_2$, οπότε $\varepsilon\varphi\omega_1<\varepsilon\varphi\omega_2$, δηλαδή $f'(x_1)<f'(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό άλλωστε επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι $f''(x)=e^x>0$.

Για την $g(x)=\ln x$, για $x_1<x_2$ ισχύει $\omega_1>\omega_2$, δηλαδή $g'(x_1)>g'(x_2)$, που σημαίνει ότι η g' είναι γνησίως φθίνουσα. Συναρτήσεις σαν την f λέγονται κυρτές και συναρτήσεις σαν την g λέγονται κοίλες.

Στο σημείο αυτό δίνεται ο αυστηρός ορισμός των κυρτών και κοίλων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- Η γεωμετρική ερμηνεία μιας κυρτής συνάρτησης f σε διάστημα Δ είναι:
Η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f, εκτός από το σημείο M.
Μπορούμε, στηριζόμενοι στον ορισμό (f' γνησίως αύξουσα), να αποδείξουμε την πρόταση αυτή, θεωρώντας τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Η $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ μηδενίζεται για $x = x_0$. Για $x > x_0$ ισχύει $f'(x) > f'(x_0)$, δηλαδή $g'(x) > 0$. Για $x < x_0$ ισχύει $g'(x) < 0$.

Επομένως, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και ισχύει $g(x) \geq 0$, δηλαδή $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

Ανάλογη γεωμετρική ερμηνεία έχουμε και για τις κοίλες συναρτήσεις.

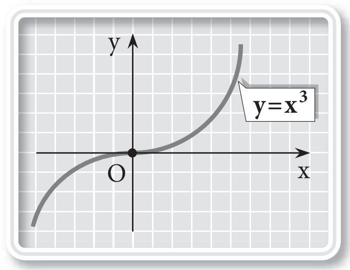
- Για να ελεγχθεί η κυρτότητα μιας συνάρτησης f, αρκεί να βρεθεί η μονοτονία της f', δηλαδή το πρόσημο της f'' (αν υπάρχει).

  Ως εφαρμογή, μπορούμε να μελετήσουμε ως προς την κυρτότητα τις συναρτήσεις

$$f(x) = x^4 - x^3 - 1, \quad g(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{και} \quad h(x) = \ln|\ln x|.$$

2 Η έννοια του σημείου καμπής

Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, επειδή $f''(x) = 6x$, η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, 0]$. Στο σημείο, $x_0 = 0$, όπου αλλάζει η κυρτότητα της f, παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη, που εδώ είναι ο $x'x$, διαπερνά τη γραφική παράσταση της f. Το σημείο $(0, f(0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f.



Έτσι, δίνουμε τον ορισμό του σημείου καμπής (αλλαγή κυρτότητας και ύπαρξη εφαπτομένης).

Στην περίπτωση που στο σημείο x_0 η f παρουσιάζει καμπή και υπάρχει η f'', τότε ισχύει $f''(x_0) = 0$ (εφαρμογή του θεωρήματος Fermat για την f').

Τονίζουμε ιδιαίτερα το γεγονός ότι μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει καμπή μόνον σε εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος.

Ως εφαρμογή, ζητείται από τους μαθητές, να βρούν τα σημεία καμπής των

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x + 1.$$

3 Θεωρητική εφαρμογή

Μπορεί να αποδειχθεί τουλάχιστον μία από τις ανισότητες Jensen, όπως:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

Η ανισότητα αυτή προσφέρεται και για γεωμετρική ερμηνεία (με τη διάμεσο τραπεζίου).

4 Ασκήσεις για το σπίτι

α) Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^x,\ g(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}} \ \text{ και } \ h(x)=\frac{2}{x}\sqrt{2x-x^2}$$

και να εξετασθεί αν οι γραφικές τους συναρτήσεις έχουν σημεία καμπής.

β) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in V$ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x^2-3x+2+\beta \ln x$ να έχει σημείο καμπής το $A(1, 5)$.

Στη συνέχεια, να βρεθεί το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο διάστημα $[0,1]$, να αποδειχθεί ότι $f(0)+f(1)<2f\left(\frac{1}{2}\right)$.